PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO EN *Pinus montezumae* Lamb. USANDO MODELOS DE DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS.

Acosta Mireles Miguel [1]
Torres Rojo Juan M.[2]
Rodríguez Franco Carlos [3]

RESUMEN

Se presentan las ecuaciones de predicción del crecimiento y rendimiento incluyendo la predicción de distribuciones diamétricas para rodales naturales y de estructura regular de *Pinus montezumae* Lamb. La información se obtuvo de dos mediciones en 64 parcelas permanentes realizadas en 1974 y 1990 en el C.E.F. San Juan Tetla, Pue. La Predicción de categorías diamétricas se hace a través de la predicción de parámetros usando la función de densidad de probabilidades Weibull. Los parámetros y las variables de estado del rodal se predicen a través de modelos ajustados con la técnica de regresión lineal múltiple. Los modelos ajustados de predicción de parámetros y variables de estado, se validaron con datos de ocho parcelas, las cuales no se incluyeron en el análisis. Los modelos de predicción mostraron resultados satisfactorios de la validación.

Palabras clave: *Pinus montezumae*, predicción de crecimiento, distribución diamétrica, validación de modelos.

ABSTRACT

Prediction and proyection ecuations for yield and growth, including diameter distributions predictions for natural stands of *Pinus montezumae* growing in Experimental Forest "San Juan Tetla" are suggested.

---

[1] Investigador Titular del Campo Experimental Valle de México, CIR-Centro, INIFAP, SAGAR.
[2] Profesor de la Universidad Panamericana. México, D. F.
[3] PhD. Director General de Investigación Forestal. INIFAP, SAGAR.

Diameter class prediction was done using Weibull distribution. The data of eight plots were validated in this study.

Key words: *Pinus montezumae*, growth prediction, diameter distribution, modeling validate.

INTRODUCCIÓN

Para una planeación y control eficientes de la producción forestal es necesàrio contar con modelos de crecimiento que puedan predecir el rendimiento actual y futuro de una masa en un determinado período de tiempo. Estos modelos se pueden integrar a un simulador que proporcione en forma rápida el crecimiento "simulado" a partir de determinadas condiciones iniciales del bosque.

Los primeros modelos de crecimiento en México se comenzaron a generar hace apenas dos décadas, no obstante, a la fecha se han generado modelos integrados de totalidad del rodal, modelos de distribuciones diamétricas y modelos de árboles individuales en diferentes especies y para algunos lugares del país.

El objetivo del presente trabajo es presentar un modelo de predicción del rendimiento maderable para *Pinus montezumae*, en el Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla; que servirá como herramienta para integrar un plan de manejo para la especie y el lugar indicado.

REVISIÓN DE LITERATURA

El crecimiento de árboles y rodales ha sido estudiado desde los inicios de la Dasonomía. A principios de este siglo los análisis cuantitativos del crecimiento de los bosques han progresado rápidamente en extensión y grado de sofisticación (Pienaar y Turnbull, 1973)[4], generándose hasta la fecha una gran cantidad de técnicas para elaborar modelos matemáticos que describan el comportamiento de un determinado proceso.

[4] Pienaar, L. V. y K. J. Turnbull. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. pp. 2-22.

A medida que el uso de los modelos matemáticos se ha generalizado, el conocimiento del potencial técnico de éstos se ha difundido lenta pero progresivamente, ocasionando, por un lado, una mejor apreciación de las cualidades de los modelos matemáticos, pero por otra parte se han fomentado ciertos abusos y malentendidos, derivados de la enorme comodidad de manipulación de los modelos, una vez que han sido programados en computadoras (Mendoza, 1983)[5].

Muchas veces se manipulan dichos modelos sin tomar en cuenta los supuestos en que éstos se basan y la teoría del análisis estadístico que los respalda. Como consecuencia se tienen predicciones erróneas o que carecen de algunas de las cualidades propias de un buen modelo para determinar el alcance de utilización de éstos. Mendoza (*op. cit.*), identifica seis cualidades deseables en un modelo: 1) generalidad, 2) simplicidad, 3)realismo, 4) precisión, exactitud y confiabilidad, 5) validez y 6) elasticidad.

Históricamente, la construcción de tablas de rendimiento ha sido orientada hacia la predicción de condiciones futuras del rodal (Drew y Flewelling, 1977)[6]. Estas predicciones tradicionalmente han asumido la forma de tablas de rendimiento. Sin embargo, hoy en día, muchos sistemas de predicción de rendimiento son expresados como ecuaciones matemáticas o sistemas de ecuaciones en lugar de tablas (Clutter *et al.*, 1983)[7].

La predicción del rendimiento actual o futuro por medio de modelos de rodales completos con distribuciones diamétricas, se realiza con el siguiente procedimiento:

El número de árboles por unidad de área en cada categoría diamétrica se estima a través del uso de una función de distribución de probabilidad (fdp), la cual proporciona la frecuencia relativa de árboles por categoría. La altura se proyecta para árboles de determinado diámetro que crecen dentro de las condiciones del rodal. Una vez estimadas las frecuencias por categoría y la altura promedio de las mismas, el volumen por clase se calcula sustituyendo la altura media predicha y el punto medio de la categoría diamétrica en la ecuación de volumen por árbol individual. Finalmente, el rendimiento estimado se obtiene sumando el volumen de cada categoría (Burkhart y Brooks, 1982)[8].

[5] Mendoza B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. pp. 35-45.

[6] Drew, T. J. y J. W. Flewlling. 1977 Some recent japanese theories of yield-density relationships and their application to monterey pine plantations. pp. 517-534.

[7] Clutter, J. L.; J. C. Fortson; L. V. Piennar; H. G. Brister y R. L. Bailey. 1983. Timber management: A quantitative approach.

[8] Burkhart, H. E. y T. M. Brooks. 1982. Predicting growth and yield: alternative approaches and their applications.

Una de las funciones más utilizadas para estimar distribuciones diamétricas es la función de distribución de probabilidades Weibull (fdW), la cual también ha sido usada en otras aplicaciones forestales (Burk y Newberry, 1984)[9]. En México se ha utilizado como modelo de distribuciones diamétricas para predecir el rendimiento actual y/o futuro (Torres, 1987[10]; Castillo, 1988[11]; y Ramírez y Fierros, 1989[12]).

Existen otros modelos que describen distribuciones diamétricas, pero quizá ninguno presente características tan favorables como la fdW, entre las cuales se pueden citar las siguientes: Es simple y fácil de manejar matemáticamente, tiene gran flexibilidad ya que la función puede adoptar diferentes formas (desde una "j" invertida hasta distribuciones con sesgo positivo o negativo), se puede integrar analíticamente y los distintos procedimientos para estimar sus parámetros permiten una selección apropiada de estimadores robustos de acuerdo a la capacidad de equipo de cómputo con que se cuente (Bailey y Dell, 1973)[13].

La fdW de tres parámetros tiene la siguiente forma:

$$f(X) = \begin{cases} c/b\ (X-a/b)^{c-1}\ \exp[-(X-a/b)^{c}] & \text{para } (a \le X \le \infty) \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Donde:

f(X) = probabilidad asociada con cada posible valor de la variable aleatoria X

a = parámetro de localización

b = parámetro de escala

c = parámetro de forma

Los parámetros "b" y "c" deben ser positivos, "a" puede tomar cualquier valor, sin embargo, para aplicaciones forestales debe ser positivo debido a que se refiere al valor mínimo de la fdp; en este caso al diámetro normal mínimo (Torres, *op. cit.*).

---

[9] Burk, T. E. y J. D. Newberry. 1984. A simple algorithm for moment-based recovery of Weibull distribution parameters. pp. 329-332.

[10] Torres R., J. M. 1987. Economic analysis of several alternatives of forest management for *Pinus hartwegii*.

[11] Castillo S., M. A. 1988. Modelo para estimación de incremento y producción maderable neta en *Pinus caribaea* var. *hondurensis* Barr. y Golf., de La Sabana, Oax.

[12] Ramírez M., H. y Fierros G., A. M. 1989. Estimación de crecimiento y rendimiento de *Pinus caribaea* Vr. *hondurensis* a través de su distribución diamétrica. pp. 459-474.

[13] Bailey, R. L. y T. R. Dell. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. pp. 97-104.

METODOLOGÍA

Base de datos

La base de datos se tomó de la remedición de 64 parcelas permanentes ubicadas en el paraje denominado "Plan de Marines" del Campo Experimental Forestal (CEF) San Juan Tetla. El lugar podría describirse como un rodal natural maduro, de estructura coetánea, poco perturbado y con una alta densidad donde crece *Pinus montezumae* como especie principal. La primera medición se realizó en 1974 y la segunda, a finales de 1989 y principios de 1990. De esta base de datos se eliminaron ocho parcelas en sus dos mediciones, con el fin de realizar una prueba de validación para cada uno de los modelos que se generaron.

Distribuciones diamétricas

Primeramente se estimaron las distribuciones diamétricas de cada parcela para las dos mediciones, mediante la función de distribución Weibull (1). Este procedimiento consiste en estimar los parámetros de esta distribución de acuerdo a la distribución diamétrica que tiene cada parcela, y por alguno de los métodos que existen (Torres *et al.*, 1992)[14]. Una vez que se estima el juego de tres parámetros "a", "b" y "c" de la fdW, se procede a calcular las frecuencias por clases de diámetros por medio de integrar la función Weibull y tomando en cuenta los límites inferior y superior de cada categoría, así se obtiene la siguiente expresión:

$$P(I<X<S) = \exp\left[-(I-a/b)^{c}\right] - \exp\left[-(S-a/b)^{c}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Donde:

I = valor inferior de la categoría diamétrica (X)
S = valor superior de la categoría diamétrica (X)
X = categoría diamétrica
P = Proporción de probabilidad para cada categoría diamétrica.

Una vez que se obtiene la proporción para cada categoría diamétrica, ésta se multiplica por el número de árboles por hectárea que contiene cada parcela para obtener la frecuencia del número de árboles en cada categoría.

Debido a que la integración de la expresión (2) inicia a partir de la categoría diamétrica más pequeña, el extremo derecho se vuelve asintótico. Por lo tanto debe encontrarse un punto de truncado adecuado para evitar demasiado sesgo en las

[14] Torres R., J. M.; M. Acosta M. y O. S. Magaña T. 1992. Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos del rodal. pp. 57-76.

predicciones del rendimiento. El criterio usado para definir el punto de truncado es el recomendado por Acosta *et al.* (1992)[15], en el que se considera la última categoría como aquella en la que el número de árboles estimado es menor o igual al 1% del total, y el número de árboles restante se distribuye en forma proporcional en las categorías anteriores, incluyendo la que registró el 1%.

Para el caso de este estudio se consideraron categorías diamétricas de 5 cm y para estimar los parámetros de la función Weibull, se usaron varios procedimientos utilizando el programa de cómputo WEIBULL, desarrollado por Torres (*op. cit.*). La selección del mejor juego de estimadores se realizó con el procedimiento recomendado por Torres *et al.* (*op. cit.*), en donde considera los estadísticos Kolmogorov-Smirnov, Chi-cuadrada y la diferencia entre el valor del diámetro medio predicho y el observado, como criterio de bondad de ajuste.

Para determinar las parcelas que mejor ajuste tuvieron se determinó un nivel de significancia de 0.95 para las dos pruebas de ajuste. A este nivel se eliminaron siete parcelas de la muestra cuya distribución no pudo describirse con el modelo Weibull. Cuando alguna de las parcelas mostró buen ajuste sólo en una de sus mediciones, esta se eliminó, debido a que para hacer las proyecciones de las variables es necesario contar por lo menos con dos mediciones hechas en diferente período de tiempo.

Se ajustaron modelos de regresión lineal múltiple para estimar los parámetros en función de las características del rodal, en donde la variable dependiente fue uno de los parámetros de la Weibull, y las variables independientes fueron atributos del rodal, tales como: área basal, diámetro normal, diámetro cuadrático, número de árboles por ha, índice de sitio y edad. El modelaje siguió el procedimiento sugerido por Torres y Acosta (1991)[16], para mejorar la predicción de parámetros de atributos de rodal. El criterio para seleccionar el mejor modelo para estimar cada parámetro de la Weibull, fue el coeficiente de determinación (R^2), el valor de F y el cuadrado medio del error, sin descuidar los valores obtenidos para el estadístico Durbin-Watson y la distribución de errores.
Las variables que se utilizaron en las ecuaciones de estimación de parámetros, como: área basal, diámetro cuadrático y diámetro normal; se proyectaron por medio de modelos de regresión lineal múltiple, para estimar sus valores a edades futuras. Como otra variable a proyectar fue necesario contar con el número de árboles por hectárea (N_2) a la edad E_2, de esta forma, se utilizó la función de mortalidad (16).

---

[15] Acosta M., M.; O. Magaña T. y Juan M. Torres R. 1992. Aspectos prácticos en el uso de modelos de crecimiento en rodales forestales, a través de la función Weibull. pp. 355-363.

[16] Torres R., J. M. y M. Acosta M. 1991. Procedimiento para mejorar la predicción de parámetros de la función de distribuciones damétricas. (Mecanografiado).

Es necesario contar con una función de altura, para que una vez que se tengan las frecuencias por cada categoría diamétrica, se pueda calcular su volumen, ya que casi todos los modelos que estiman el volumen de árboles individuales depende del DN y la altura. En este caso la variable altura debe estar en función del DN, Índice de Sitio (IS), área basal y edad para que se logre una buena estimación por parcela.

Para validar los modelos que se generaron en este trabajo, se seleccionaron aleatoriamente ocho parcelas, las cuales no se incluyeron en ningún ajuste de los modelos. Se decidió este número porque después de eliminar las parcelas que no presentaron ajustes satisfactorios, quedaron 56 para ajustar las funciones que estiman los parámetros de la Weibull con características del rodal; si se desea obtener una muestra superior al 10 % para validar los modelos, se requirieron por lo menos ocho parcelas.

Para hacer la validación se siguió el procedimiento descrito por Knoebel *et al* (1986)[17], el cual calcula un valor de bondad de ajuste denominados R^2 por medio de la siguiente expresión:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i-1}^{n} r_i^2}{\sum_{i-1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2} \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

Donde:

$r_i = Y_i - \infty_i$

Y_i = valor i-ésimo observado de la variable dependiente

∞_i = valor i-ésimo predicho de la variable dependiente

$\bar{Y}$ = valor promedio de la variable dependiente

También se calculó el valor de t para comparar dos poblaciones. Estas dos pruebas y los resultados de los ajustes para cada modelo, se usaron como criterio para seleccionar los modelos de crecimiento y rendimiento para *P. montezumae*.

[17] Knoebel, B. R., H. E. Burkhart y D. E. Beck. 1986. A growth and yield model for thinned stands of yellow-poplar.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Ecuaciones de estimación de parámetros

Siguiendo el procedimiento de Torres y Acosta (*op. cit.*) se seleccionaron tres modelos para estimar "a", uno de los cuales fue con la variable combinada (a+b) como variable dependiente. Tres para estimar "b" y tres para estimar "c"; en todos ellos se obtuvieron ajustes satisfactorios con coeficiente de determinación (r^2) superior a 0.9, a excepción de uno de los modelos para ajustar "c" en donde se obtuvo una $r^2 = 0.88$. En los dos modelos para estimar el parámetro de localización ("a") se incluyó el parámetro de escala ("b") como variable independiente y en todos fue significativo.

A continuación se muestran los modelos ajustados para los tres parámetros de la (fdW); el valor de sus estadísticos básicos se muestra con el modelo como sigue: el valor superior entre paréntesis colocado abajo de cada estimador, muestra el error estándar y el inferior, su significancia. Respecto a los demás estadísticos; la "r^2" significa el coeficiente de determinación múltiple, la "σ^2" significa la varianza del modelo y "n" es el tamaño de la muestra.

Respecto al parámetro de localización (a), se puede notar que este estimador, muestra mucha relación con el estimador del parámetro de escala (b) y con la relación del diámetro cuadrático promedio (Dq) y el diámetro normal (DN). En seguida se muestran los modelos ajustados.

$$a + b = \underset{\binom{2.3238}{0.000}}{11.3391} + \underset{\binom{70.2848}{0.0000}}{276.02}\ 1/E - \underset{\binom{32.3630}{0.0000}}{374.18}\ 1/H + \underset{\binom{0.0281}{0.0000}}{1.006}\ D_q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$r^2 = 0.921$$
$$\sigma^2 = 0.6415$$
$$n = 98$$

$$a_l = \underset{\binom{4.1521}{0.000}}{55.4556} + \underset{\binom{0.03230}{0.0000}}{0.8321}\ b \quad - \underset{\binom{29.5879}{0.0000}}{295.67}\ LDQN + \underset{\binom{0.0003}{0.0000}}{0.00519}\ D_q^2 \quad \ldots\ldots\ (5)$$

$$r^2 = 0.925$$
$$\sigma^2 = 0.2883$$
$$n = 98$$

$$a_2 = \underset{\binom{0.5053}{0.000}}{2.2530} - \underset{\binom{0.02724}{0.0000}}{0.75717}\, b + \underset{\binom{0.03933}{0.0000}}{0.86524}\, DN - \underset{\binom{0.0333}{0.0020}}{0.10415}\, H \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$r^2 = 0.921$
$\sigma^2 = 0.3067$
$n = 98$

Donde:

a_i = i-ésimo estimador del parámetro de localización
b = estimador del parámetro de escala
H = altura promedio del rodal (m)
E = edad del rodal (años)
DN = diámetro normal promedio (cm)
$D_{\bar{q}}$ = diámetro cuadrático (cm)
$LDQN = \ln(D_{\bar{q}})/DN$
$\ln(.)$ = logaritmo natural de (.)

Respecto al estimador del parámetro de escala (b) mostró relación con las variables combinadas del diámetro cuadrático y diámetro normal, número de árboles y área basal; también mostró relación con las variables simples de altura total promedio y la edad. Los modelos ajustados se muestran a continuación.

$$b_1 = \underset{\binom{1.6498}{0.000}}{122.137} - \underset{\binom{19.3996}{0.0000}}{838.204}\, LDQN \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$r^2 = 0.951$
$\sigma^2 = 3.0257$
$n = 98$

$$b_2 = \underset{\binom{1.4377}{0.000}}{108.668} - \underset{\binom{1.62260}{0.0000}}{27.195}\, LNAB - \underset{\binom{75.3573}{0.0000}}{487.34}\, 1/H + \underset{\binom{159.58}{0.0440}}{327.01}\, 1/E \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$r^2 = 0.948$
$\sigma^2 = 3.3097$
$n = 98$

$$b_3 = 119.356 - 624.70\ LDQN - 9.3204\ LNAB \quad \ldots\ldots\ (9)$$

$$\begin{pmatrix}1.8580\\0.000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}76.1344\\0.0000\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3.22180\\0.0050\end{pmatrix}$$

$$r^2 = 0.955$$
$$\sigma^2 = 2.8100$$
$$n = 98$$

Donde:

b_i = i-ésimo estimador del parámetro de escala
AB = área basal (m^2/ha)
LNAB = ln (N/AB), las demás variables como se definieron antes

Respecto al estimador del parámetro de escala (c), mostró mayor relación con las variables diámetro normal, Altura promedio y altura dominante, principalmente, los modelos ajustados se muestran en seguida:

$$c_1 = 2.57020 - 0.5592\ DqE + 0.6080\ DN \quad \ldots\ldots\ (10)$$

$$\begin{pmatrix}0.2499\\0.000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.02136\\0.0000\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0.01898\\0.0000\end{pmatrix}$$

$$r^2 = 0.953$$
$$\sigma^2 = 0.0384$$
$$n = 98$$

$$c_2 = 2.01770 + 0.3462\ H - 0.2664\ Hd \quad \ldots\ldots\ (11)$$

$$\begin{pmatrix}0.4631\\0.000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.01536\\0.0000\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0.02303\\0.0000\end{pmatrix}$$

$$r^2 = 0.883$$
$$\sigma^2 = 0.0960$$
$$n = 98$$

$$c_3 = -218.81 + 215.15\,LDQN + 16.088\,LNAB + 46.20\,\ln(DN) \quad \ldots\ldots \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix}18.813\\0.000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39.3668\\0.0000\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0.80720\\0.0000\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3.7640\\0.0000\end{pmatrix}$$

$$r^2 = 0.945$$
$$\sigma^2 = 0.0456$$
$$n = 98$$

Donde:

c_i = i-ésimo estimador del parámetro de forma

N = número de árboles por ha

Hd= altura dominante (m)

Las demás variables como fueron definidas.

Una variable que se utilizó en varios de los modelos fue $\ln(D_q/DN)$, la cual presentó alta significancia con los tres conjuntos de estimadores. Se intentó utilizar otras relaciones como $\ln(D_q\text{-})/AB$, $\ln(D_q\text{-})/N$, etc. para no utilizar el DN, porque esta variable generalmente es difícil de proyectar; sin embargo, dada la calidad de los ajustes logrados con ella se decidió conservarla. Por otra parte el modelo que se ajustó para proyectar la variable DN, presentó buenos resultados, como se verá más adelante.

Una vez que se obtuvieron los modelos para predecir cada uno de los parámetros, se intentó buscar la mejor combinación de éstos, de tal manera que al hacer la integración de la fdW con cada combinación de modelos para los tres parámetros, se selecciona el que mejor ajuste representa para la distribución diamétrica observada, en base a la diferencia entre el valor del diámetro medio predicho menos el observado, y a los estadísticos de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov y Ji-cuadrada.

Para realizar el procedimiento descrito en el párrafo anterior se elaboró un programa de cómputo el cual alimentado con los datos de cada sitio, estima los parámetros con todas las combinaciones posibles de estimadores y calcula sus estadísticos. El programa se corrió para las 98 parcelas (49 parcelas con sus dos mediciones) con el propósito no sólo de encontrar la combinación de estimadores que brindara el mejor ajuste, sino también, relacionar la mejor combinación con atributos del rodal.

El resultado fue que para la mayoría de las parcelas se encontró la siguiente combinación como la mejor: $a+b$ / b_2 / c_1 , o sea los modelos (4), (8) y (10); aunque se encontraron algunas parcelas que presentaron mejores tipos de combinaciones, pero debido a que se usó un criterio de generalidad se optó por dejar esta combinación como la mejor y en base a la misma se hicieron las predicciones para los rendimientos de cada parcela en la validación.

Modelos de proyección de variables y función de mortalidad

Una vez que se seleccionaron los modelos para predecir los parámetros de la fdW, fue necesario ajustar ecuaciones para proyectar variables adicionales como área basal, DN y D_q-.

A continuación se muestran las ecuaciones resultantes.

$$\ln(AB_2) = \underset{\binom{0.2263}{0.0180}}{-0.5528} + \underset{\binom{0.05341}{0.0000}}{1.1469} (E_1/E_2)\ln(AB_1) + \underset{\binom{0.53960}{0.0000}}{5.4477}(1- E_1/E_2) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$r^2 = 0.905$$
$$\sigma^2 = 0.00262$$
$$n = 56$$

$$\ln(DN_2) = \underset{\binom{0.2378}{0.0001}}{1.3166} + \underset{\binom{0.38530}{0.0001}}{5.228} (1-E_1/E_2) + \underset{\binom{0.05582}{0.0001}}{1.3652}(E_1/E_2)\ln(D_q) \quad \ldots \quad (14)$$

$$r^2 = 0.943$$
$$\sigma^2 = 0.0006$$
$$n = 56$$

$$\ln(Dq_2) = \underset{\binom{0.1137}{0.0001}}{4.0923} (1- E_1/E_2) + \underset{\binom{0.00644}{0.0001}}{1.03224} (E_1/E_2)\ln(Dq_1) \quad \ldots \quad (15)$$

$$r^2 = 0.927$$
$$\sigma^2 = 0.000423$$
$$n = 56$$

Para los tres modelos se obtuvieron buenos ajustes, ya que se obtuvo una r^2 superior a 0.90. Al modelo que se usó para proyectar el DN, se le anexó la variable IS para tratar de obtener un mejor ajuste, pero su parámetro no fue significativo y se eliminó del modelo. Por otra parte, en lugar de utilizar el DN inicial se usó el D_q- como variable independiente, con la cual se obtuvieron buenos resultados.

Estos tres modelos se validaron usando los datos de validación antes descritos, la expresión (3) y el estadístico t de Student para comparar dos poblaciones. Los resultados se muestran en el Cuadro 1, en donde se observa que los modelos (13) y (14) para proyectar área basal y DN brindaron buenas proyecciones ya que la R^2 calculada fue de 0.858 y 0.825 respectivamente. En cambio para proyectar el D_q- se determinó una R^2 =0.699 a pesar de que en el ajuste el coeficiente de determinación fue de 0.919.

MODELOS	VARIABLE DEPENDIENTE	N	R^2	t_c	Pr.|t|
(13)	AB_2	8	0.858	-0.253	0.8044
(14)	DN_2	8	0.825	-0.185	0.8557
(15)	Dq_2	8	0.699	-0.508	0.6195
(16)	N_2	8	0.916	0.123	0.9037
PREDICCIÓN	V_2	8	0.789	-0.080	0.9376
IMPLÍCITA	AB_2	8	0.754	0.314	0.7582

V_2 = rendimiento futuro (m^3 /ha)
AB_2 = área basal proyectada a la edad E_2 (m^2/ha)
DN_2 = DN proyectado a la edad E_2 (cm)
Dq_2 = Dq proyectado a la edad E_2 (cm)
N_2 = número de árboles por ha proyectados a la edad E_2

Cuadro N° 1. Prueba de validación para los modelos de crecimiento y rendimiento que se ajustaron para *Pinus montezumae*. En la prueba se usaron 8 parcelas y la prueba de t y R^2 calculada con la expresión (3).

Otra variable de gran importancia a proyectar, es el número de árboles por ha. Para predecirlo se usan funciones de mortalidad e incluso en algunos casos se usan modelos para estimar la probabilidad de muerte de un árbol para un determinado periodo de tiempo. Este último tipo de predicciones por lo general se utiliza en modelos de árboles individuales.

Para el presente caso se usó un modelo sencillo de regresión no-lineal, aunque se probaron otros más complejos para tratar de mejorar el ajuste, se optó por usar éste ya que el coeficiente de variación de sus parámetros fue ligeramente bajo. El modelo ajustado se presenta en seguida en donde se observa que se obtuvo una r^2=0.941 y el error standard de sus coeficientes fueron menores que el valor de los mismos.

$$N_2 = N_1.(E_1 / E_2)^{-0.88597} \exp[-0.56422 + 0.006968 (D_{q1})] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

$$\begin{pmatrix}0.3000\\0.0050\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0.1215\\0.0001\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0.00168\\0.0001\end{pmatrix}$$

$$r^2 = 0.941$$
$$\sigma^2 = 45.545$$
$$n = 54$$

Donde:

N_1 = número de árboles por ha a la edad inicial E_1

N_2 = número de árboles por ha a la edad de proyección E_2

E_1 = edad inicial (años)

E_2 = edad de proyección (años)

exp = base de los logaritmos neperianos

D_q-$_1$ = diámetro cuadrático a la edad inicial E_1 (cm)

LDQN = ln(D_q-)/DN

LNAB = ln (N/AB)

Este modelo también se validó siguiendo los mismos criterios que los anteriores modelos, donde se obtuvo como resultado una R^2 =0.916 y un valor más o menos bajo de t_c de Student (Cuadro N° 1).

Si se toma en cuenta la dificultad que acarrea el estimar mortalidad, estos resultados bien pudieran considerarse como buenos. Por ejemplo en los resultados que se obtuvieron en las dos mediciones de las 64 parcelas, el número de árboles por hectárea muertos en el período de medición (15 años) varió desde 0 hasta 36, lo que significa que en la ocurrencia de este fenómeno (mortalidad) intervienen muchos factores difíciles de determinar y más aún de evaluar y modelar.

Un aspecto que es importante resaltar, es que en los modelos para proyectar las variables AB, DN, Dq, e incluso mortalidad, no se incluyó la variable IS como predictora, ya que en ninguno fue significativa su inclusión. Un factor que pudo influir es que el área donde están ubicadas las parcelas pertenecen a un rango de IS muy pequeño (de 21.7 a 34.5) ya que están en el mismo lugar.

Para proyectar la altura (H) se usó el modelo que ajustó Acosta (1991)[18] como modelo de crecimiento en altura.

Ecuación de altura en función del diámetro normal y sitio

Una vez que se tienen definidos los modelos que se deben utilizar para estimar los parámetros de la fdW, se requiere ajustar una función que estime la altura en base al DN y a características del rodal como IS, edad, etc. De esta forma, después al hacer la integración de la función Weibull y estimar las frecuencias por categoría diamétrica, se podrá determinar el volumen por cada categoría y finalmente obtener el volumen total por ha, de cada parcela sumando el volumen de las categorías.

Con base en lo anterior se buscó alguna función para estimar la altura, cabe señalar que se ajustaron varios modelos (incluyendo modelos no-lineales) y finalmente se optó por utilizar el que se muestra en seguida:

$$H = DN^2 / (\underset{\begin{pmatrix}5.2944\\0.4159\end{pmatrix}}{4.310938} + \underset{\begin{pmatrix}0.00021\\0.00001\end{pmatrix}}{0.026076}\, DN^2 - \underset{\begin{pmatrix}0.18846\\0.0001\end{pmatrix}}{0.838744}\, IS + \underset{\begin{pmatrix}216.8197\\0.0001\end{pmatrix}}{2601.116771} / E)$$

$$r^2 = 0.968$$
$$\sigma^2 = 91.292$$
$$n = 518$$

De acuerdo a los resultados del análisis de varianza para este modelo se observa que se obtuvieron resultados satisfactorios, ya que se logró una $r^2=0.968$; los coeficientes fueron significativos, a excepción de la interceptada. Este modelo tiene la característica de que cuando DN tiende a infinito el valor de H se vuelve asintótico y el parámetro que define ese valor, es el coeficiente del DN (1/0.026076=38.3494), valor congruente con la base de datos utilizada.

[18] Acosta M., M. 1991. Modelo de crecimiento para Pinus montezumae Lamb. en el CEF San Jaun Tetla, Puebla.

Validación de la predicción del rendimiento

La validación del modelo de distribuciones diamétricas generado a través de la técnica de predicción de parámetros, se llevó a cabo de dos formas: Una para validar la recuperación de la distribución que se genera con el juego de parámetros estimados con respecto a la distribución real de las parcelas seleccionadas. La otra consistió en validar el volumen y área basal obtenidos implícitamente con respecto al volumen y área basal reales.

Para la primera prueba de validación se usaron los estadísticos de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov y Ji-cuadrada. Para esta prueba se consideraron los valores de área basal, DN y mortalidad predichos con los modelos 15-18 como valores para predecir los parámetros de la distribución diamétrica asociada a ellos. El Cuadro N° 2 muestra los resultados de esta validación donde se observa que de acuerdo al estadístico Kolmogorov-Smirnov el ajuste es satisfactorio con un a=0.05 sólo para las parcelas 19, 25 y 27. En cambio, para la prueba de Ji-cuadrada, el ajuste es satisfactorio para seis de las ocho parcelas.

PARCELA	PREDICHOS-OBSERVADOS		K-S[19]	G.L.[20]	JI-C[21]	G.L.
	VOLUMEN m^3/ha	AB m^2/ha				
03	70.083	5.007	$.1618^{NO}$	31	26.31^{**}	17
19	21.007	1.905	$.1065^{**}$	34	10.61^{**}	16
22	18.786	2.421	$.1753^{NO}$	33	22.99^{**}	16
25	-26.853	-1.944	$.1246^{**}$	41	17.71^{**}	14
27	-20.359	-0.171	$.0659^{**}$	34	12.39^{**}	15
39	-13.195	-1.003	$.1444^{NO}$	45	29.93^{NO}	13
48	-37.483	-2.034	$.1673^{NO}$	44	35.84^{NO}	51
58	9.084	1.972	$.1661^{NO}$	45	13.50^{**}	14

El doble asterisco (**) significa que el ajuste es significativamente satisfactorio con por lo menos un α=0.05.

Cuadro N° 2. Resultado del ajuste de la distribución generada con los estimadores de los parámetros predichos de la fdW, utilizando las ecuaciones (4), (8) y (11).

En el mismo Cuadro N° 2, se incluyó la desviación entre los valores predichos y observados de las variables volumen y área basal. Observe que la predicción del área basal tubo gran influencia en la del volumen, ya que cuando la desviación del área

[19] Valor del estadístico Kolmogorov-Smirnov
[20] Grados de libertad
[21] Valor del estadístico Ji-cuadrada

basal fue negativa también lo fue la del volumen. Además, cuando la desviación del área basal fue alta, como en el caso de la parcela 03; también lo fue para el volumen.

Otro aspecto que es conveniente recalcar, es que a pesar de que en las parcelas 39 y 48 el ajuste no fue satisfactorio con ninguno de los dos estadísticos, las predicciones del volumen y área basal fueron aceptables. Esto se debe a que la distribución de estas parcelas es bastante irregular por lo que la curva ajustada con los parámetros predichos difiere mucho de la distribución real.

El Cuadro N° 1 presenta los resultados de la segunda validación. En las hileras correspondientes a la predicción implícita se presentan los valores de R^2 y t. Los resultados pueden considerarse aceptables, ya que se obtuvieron los valores de R^2 de 0.754 y 0.789 para el volumen y área basal respectivamente; y los valores 0.314 y -0.059 para el estadístico t de Student. Además, el valor real muestra que no hay diferencias significativas entre las estimaciones.

Considerando que en este tipo de modelos de crecimiento se incurre en una acumulación de errores, conforme se ajustan varios modelos para las diferentes variables que intervienen, y que además, en rodales naturales, es posible que los errores se acrecienten; los resultados obtenidos en el presente trabajo, bien pudieran considerarse como aceptables, y por lo tanto, factibles de ser utilizados para generar un simulador en el lugar y para la especie estudiada.

CONCLUSIONES

- Al utilizar el procedimiento sugerido por Torres y Acosta (*op. cit.*) para hacer las predicciones de los parámetros de la fdW con atributos del rodal, se mejoran significativamente los ajustes.
- En función de los resultados que se obtuvieron con el análisis de validación de los modelos, se determinó que la mejor combinación de modelos para hacer la predicción de los parámetros de la fdW, es la siguiente: a+b, b_2 , y c_1 , o sea los modelos (4), (8) y (10).

- Los modelos que se ajustaron para proyectar las variables área basal, diámetro normal y diámetro cuadrático, a edades futuras; presentaron una r^2 superior a 0.9. Sin embargo, en la validación presentaron una R^2 menor a 0.9, incluso para validar el diámetro cuadrático sólo se obtuvo una R^2 = 0.7.

- El modelo que se ajustó como función de mortalidad, presentó buenos resultados, tanto en el ajuste como en la validación, ya que en ambos se obtuvo un coeficiente de determinación superior a 0.9.

- En la validación de la distribución que se generó con el juego de parámetros estimados, comparada con la distribución real de las parcelas seleccionadas; se observó que de acuerdo al estadístico Kolmogorov-Smirnov, el ajuste fue satisfactorio con un α =0.05 sólo para tres de las ocho parcelas, y para la prueba de Ji-cuadrada, el ajuste fue satisfactorio para seis.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta M., M. 1991. Modelo de crecimiento para *Pinus montezumae* Lamb. en el CEF San Juan Tetla, Puebla. Tesis de Maestría en Ciencias Forestales. DiCiFo. UACH. Chapingo, México 88 p.

Acosta M., M.; O. Magaña T. y J. M. Torres R. 1992. Aspectos prácticos en el uso de modelos de crecimiento en rodales forestales, a través de la función Weibull. *In:* Memorias "Primer Foro Nacional Sobre Manejo Integral Forestal." 10 y 11 de Octubre de 1991. Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, México. pp. 355-363.

Bailey, R. L. y T. R. Dell. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. Forest Science 19:97-104.

Burk, T. E. y J. D. Newberry. 1984. A simple algorithm for moment-based recovery of Weibull distribution parameters. Forest Science 30:329-332.

Burkhart, H. E. y T. M. Brooks. 1982. Predicting growth and yield: alternative approaches and their applications. Prepared for Presentation at 31st. Annual Forestry Symposium "Predicting Growth and Yield in the Mid-South". Louisiana State University. 13 p.

Castillo S., M. A. 1988. Modelo para estimación de incremento y producción maderable neta en *Pinus caribaea* var. *hondurensis* Barr. y Golf., de la Sabana, Oax. Tesis de Ing. Agr. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 81 p.

Clutter, J. L.; J. C. Fortson; L. V. Pienaar; H. G. Brister y R. L. Bailey. 1983. Timber management: A quantitative approach. New York, Wiley. 333 p.

Drew, T. J. y J. W. Flewelling. 1977. Some recent japanese theories of yield-density relationships and their application to monterey pine plantations. Forest Science 23:517-534.

Knoebel, B. R.; H. E. Burkhart y D. E. Beck. 1986. A growth and yield model for thinned stands of yellow-poplar. Forest Science Monograph. 27:39 p.

Mendoza B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. *In:* Primera Reunión sobre Modelos de Crecimiento de Árboles y Masas Forestales. Publicación Especial No. 44. INIF, SARH, México. pp. 35-45.

Pienaar, L. V. y K. J. Turnbull. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. Forest Science 19:2-22.

Ramírez M., H. y A. M. Fierros G. 1989. Estimación del crecimiento y rendimiento de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* a través de su distribución diamétrica. *In:* Salazar, R. (ed.). 1989. Memoria: Cuarta Reunión del Grupo de Trabajo de IUFRO. Silvicultura en los Neotrópicos. Antigua, Guatemala. 3 al 7 de Abril de 1989. CATIE, Turrialba, Costa Rica. pp. 459-474.

Torres R., J. M. 1987. Economic analysis of several alternatives of forest management for *Pinus hartwegii*. Master Thesis. Oregon State University. 126. p.

Torres R., J. M. y M. ACOSTA M. 1991. Procedimiento para mejorar la predicción de parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull, en la estimación de distribuciones diamétricas. (Mecanografiado).

Torres R., J. M.; M. Acosta M. y O. S. Magaña T. 1992. Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos del rodal. AGROCIENCIA Serie RECURSOS NATURALES RENOVABLES. Vol. 2. No. 2. pp. 57-76.