



DOI: <https://doi.org/10.29298/rmcf.v10i53.500>

Artículo

Modelo generalizado no-lineal altura-diámetro con efectos mixtos para siete especies de *Pinus* en Durango, México

A generalized nonlinear height–diameter model with mixed-effects for seven *Pinus* species in Durango, Mexico

Sacramento Corral Rivas^{1*}, Alma Mireya Silva Antuna² y Gerónimo Quiñonez Barraza³

Abstract

Durango is the major state for timber production in Mexico (28.5 % of the national total); it is estimated that the area under use is 2 million hectares, which is why forest management is an important task for forestry managers. The height-diameter relationship (*h-d*) is mainly used to describe the structure of a stand, to estimate the individual-tree total volume or stand level volume and to assess the site quality. In this study, a generalized equation was developed for the *h-d* relationship of seven conifer species in mixed-species forests in northwestern *Durango*, Mexico. The equation considers diameter at breast height, dominant height, stand basal area and density as independent variables. The nonlinear mixed effect model procedure was used to fit data coming from 44 permanent sample stem-mapped plots. The generalized model explained 82 % of the total variability. Model calibration involved measuring the tree total height in a sample of three trees of average diameter class for each plot. The equation developed could be used as a biometric tool for forest management in mixed forests of the study area.

Key words: Mixed-species forests, calibration process, generalized equation, non-linear mixed models, *Pinus* sp., height-diameter relationship.

Resumen

Durango es el principal estado en México para la producción de madera (28.5 % del total nacional). Se estima que la superficie bajo aprovechamiento es de 2 millones de hectáreas; razón por la cual, la ordenación forestal es una tarea importante para los manejadores silvícolas. El conocimiento sobre la relación altura-diámetro (*h-d*) de los árboles se utiliza, principalmente, para caracterizar la estructura del rodal, estimar el volumen de los árboles individuales o del rodal, y para determinar la altura dominante con el propósito de evaluar la productividad vía el índice de sitio. En este trabajo se desarrolló una ecuación generalizada para describir la relación *h-d* de siete especies de coníferas en los bosques mezclados del noroeste de Durango, México. La ecuación considera como variables independientes al diámetro normal, altura dominante, área basal y la densidad. Para la variabilidad entre 44 sitios permanentes, el ajuste de la mejor ecuación fue mediante el enfoque de modelos mixtos no lineales. El modelo generalizado desarrollado explicó 82 % de la variabilidad total de los datos observados. Para calibrar el modelo mixto se determinó que se requiere medir la altura total de una submuestra de tres árboles de clase diamétrica promedio dentro de cada parcela. La ecuación generada constituye una herramienta para el manejo forestal de los bosques mezclados del área de estudio.

Palabras clave: Bosques mezclados, calibración, ecuación generalizada, modelos mixtos no-lineales, *Pinus* sp., relación altura-diámetro.

Fecha de recepción/Reception date: 14 de febrero de 2019
Fecha de aceptación/Acceptance date: 14 de abril de 2019.

¹Instituto Tecnológico de El Salto. México.

²Programa de Maestría en Ciencias en Desarrollo Forestal Sustentable. Instituto Tecnológico de El Salto. México.

³Campo Experimental Valle del Guadiana. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias. México.

*Autor por correspondencia; correo-e: sacra.corral@gmail.com

Introducción

El manejo forestal en México requiere de mecanismos cuantitativos de predicción que proporcionen información detallada del crecimiento y desarrollo de los bosques naturales. Para un manejo moderno enmarcado en el concepto de sustentabilidad, se requiere mejorar la precisión en el diseño de prescripciones silvícolas que solo pueden ser proporcionadas por herramientas que involucren a las variables del rodal (Vargas *et al.*, 2017). La estimación de la altura total (h) de los árboles de un rodal tiene dos roles en la modelación del crecimiento y la producción: (1) la altura dominante y la edad, que se utilizan para estimar la productividad del sitio; (2) las curvas altura-diámetro son la base para predecir los volúmenes totales y comerciales de un árbol y de la masa forestal (López *et al.*, 2003). La estimación precisa de la relación $h-d$ es importante debido a que la altura total es una variable más difícil y costosa de medir en campo, que el diámetro normal, y por lo general se mide solo en una muestra de árboles (Sharma y Breidenbach, 2015).

La relación altura-diámetro ($h-d$) puede ajustarse con funciones lineales y no - lineales (Huang *et al.*, 1992). Las relaciones que consideran únicamente al diámetro normal, conocidas como funciones locales, no se adaptan bien a todas las posibles condiciones de crecimiento del bosque ni a diferente estado silvícola de los rodales, debido a que la altura total varía con la calidad de estación o con la densidad (Prodan *et al.*, 1997). Por lo tanto, una función única no puede ser utilizada para estimar todas las relaciones $h-d$ factibles que se presenten dentro de los diferentes rodales a lo largo de su desarrollo; por ello, para mejorar la precisión se tienen que incluir variables que caracterizan la dinámica de cada rodal, lo que da origen a las funciones denominadas generalizadas (Crecente *et al.*, 2010; Hernández *et al.*, 2015).

La altura total, como el diámetro normal son variables que se obtienen de árboles del mismo sitio de muestreo, los cuales se ubican en masas con distintos emplazamientos geográficos, por lo que tales datos tienen una estructura jerárquica, ya que los datos de la misma unidad de muestreo tienden a parecerse más entre sí. Esta estructura estocástica anidada propicia una falta de independencia de las mediciones, dado que

las observaciones de cada sitio de muestreo pueden estar correlacionadas (Gregoire, 1987; Fox *et al.*, 2001).

Los modelos de efectos mixtos han sido usados de manera exitosa para tratar ese tipo de problemas (Calama y Montero, 2004; Castedo *et al.*, 2006); dicha técnica estima, simultáneamente, los parámetros fijos (comunes para la población) y aleatorios (específicos del sitio) en un mismo modelo, y permite modelar la variabilidad detectada entre sitios de la misma muestra o población, lo cual los hace más eficientes para predecir la altura total de un árbol nuevo. Además, con la inclusión de parámetros aleatorios específicos para cada sitio de muestreo dentro del modelo, se explica la variabilidad de un determinado fenómeno entre sus diferentes localizaciones (luego de definir la estructura de la matriz de varianzas-covarianzas de parámetros aleatorios), ello proporciona una mejora en las estimaciones de la variable dependiente (altura total del árbol) (Castedo *et al.*, 2006).

Durango es el estado más importante en México para la producción de madera (28.5 % del total nacional) y se estima que la superficie bajo aprovechamiento es de 2 millones de hectáreas (Luján *et al.*, 2016); razón por la cual, la ordenación forestal se convierte en una tarea importante para los manejadores silvícolas. En la Sierra Madre Occidental en Durango, los tipos de vegetación predominantes son rodales de pino-encino, a menudo mezclados con *Pseudotsuga*, *Arbutus* y *Juniperus*, principalmente; al respecto, las especies del género *Pinus* constituyen cerca de 80 % de la producción maderable, seguidas por las de *Quercus* (Návar *et al.*, 2013).

Así, el desarrollo de una eficiente función $h-d$ para bosques mezclados resulta útil para su integración dentro de los modelos de crecimiento y producción usados en el manejo forestal; además, constituye una herramienta para estimar la altura total de los árboles del sitio, a partir de una submuestra medida en campo y con ello se ahorra tiempo y costo en los inventarios forestales maderables (Vargas *et al.*, 2009; Corral *et al.*, 2014; Guerra *et al.*, 2019).

Con base en esas consideraciones, el objetivo de este trabajo consistió en desarrollar una ecuación generalizada para describir, de manera eficiente, la relación $h-d$ con

parámetros estimados, mediante el ajuste de modelos de efectos mixtos para siete especies de coníferas de la región noroeste del estado de Durango.

Materiales y Métodos

Área de estudio

El estudio se realizó en bosques mezclados de los ejidos San Diego de Tezains y Salto de Camellones, pertenecientes a la Unidad de Manejo Forestal (Umafor) 1005 "Santiago Papasquiario y Anexos". El área de estudio se ubica en la región noroeste del estado de Durango, entre los 24°30'-25°27' N y 105°01'-106°24' O. La altura sobre el nivel del mar fluctúa de 800 a 3 103 m. El clima predominante es templado con lluvias en verano. La precipitación media anual varía de 1 000 a 1 200 mm. La temperatura media anual de 5 a 18 °C, la temperatura más fría ocurre en enero (-6 °C) y las más calurosa en mayo (28 °C) (García, 1981; Quiñonez *et al.*, 2018). Las comunidades forestales más importantes están constituidas por especies de *Pinus*, *Quercus*, *Juniperus*, *Cupressus*, *Pseudotsuga*, *Arbutus* y *Alnus*. Aproximadamente 90 % del área de estudio corresponde a masas mixtas con estructuras irregulares (Quiñonez *et al.*, 2018).

Origen de los datos

La información dasométrica utilizada para el ajuste de la relación funcional $h-d$ se obtuvo de 44 unidades o sitios permanentes de muestreo y monitoreo del crecimiento y producción que datan del año 2008, y cubren todos los tipos de vegetación, calidades de sitio, densidades y edades en los rodales en producción maderable. Sus dimensiones son de 50 × 50 m y se establecieron bajo un diseño de muestreo sistemático. Para cada individuo con diámetro normal igual o mayor de 7.5 cm, se registró información de especie, diámetro normal (d , cm), altura total del árbol (h , m), diámetro de copa (m) y su posición respecto al centro de la parcela (azimut, grados; distancia, m).

Se procesó una base de datos con un total de 24 especies. La composición estimada fue de 84 % para el género *Pinus* (*P. arizonica* Engelm., *P. ayacahuite* Ehrenb., *P. durangensis* Martínez, *P. herrerae* Martínez, *P. lumholtzii* B. L. Rob. & Fernald, *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham., *P. douglasiana* Martínez), 8 % para el *Quercus* (*Q. sideroxylla* Humb. & Bonpl., *Q. arizonica* Sarg., *Q. mcvaughii* Spellenb., *Q. durifolia* Seemen ex Loes, *Q. crassifolia* Bonpl., *Q. jonesii* Trel., *Q. rugosa* Neé, *Q. laeta* Liebm.) y 8 % para los taxones de *Juniperus*, *Cupresus*, *Arbutus* y *Alnus* (*J. deppeanna* Steud., *J. durangensis* Martínez, *C. lusitánica* Mill., *A. arizonica* (A. Gray) Sarg., *A. bicolor* M. González & P.D. Sørensen, *A. madrensis* M. González, *A. tessellata* P.D. Sørensen, *A. xalapensis* Kunth., y *Alnus firmifolia* Mill). Solo se utilizaron los datos de *h-d* de los taxa del género *Pinus*. La distribución de los pares de datos se examinó a través de gráficas, para detectar valores atípicos, los cuales fueron eliminados de la base de datos usada para el ajuste de las ecuaciones; en el Cuadro 1 se muestran los principales estadísticos descriptivos de las variables analizadas.



Cuadro 1. Estadísticos descriptivos de las variables utilizadas en el ajuste de las ecuaciones $h-d$.

Especie	Núm. de árboles	<i>d</i> (cm)				<i>h</i> (m)			
		Mínimo	Máximo	Promedio	SD	Mínimo	Máximo	Promedio	SD
<i>P. arizonica</i>	205	7.5	52.0	19.3	10.9	2.8	29.3	13.4	6.2
<i>P. ayacahuite</i>	281	7.5	91.3	15.2	9.6	2.3	38.1	9.7	4.4
<i>P. durangensis</i>	1 730	7.1	99.5	17.0	10.6	2.9	35.3	11.9	5.5
<i>P. herrerae</i>	629	7.3	78.5	22.6	13.6	2.9	35.3	15.6	6.5
<i>P. lumholtzii</i>	287	7.5	46.5	16.9	7.1	2.3	23.6	10.4	4.7
<i>P. teocote</i>	803	6.9	68.0	17.5	10.1	2.7	34.7	10.9	4.8
<i>P. douglasiana</i>	98	7.5	79.3	18.1	13.2	3.7	25.1	11.6	5.6
<i>Pinus sp</i> *	4 033	6.9	99.5	18.0	11.0	2.3	38.1	12.1	5.7

SD = Desviación estándar de la media; * = Incluye toda la base de datos de las especies del género *Pinus*.



En cada unidad de muestreo (sitio) se estimaron: el número de árboles por hectárea (N , árboles ha^{-1}), área basal por hectárea (G , $\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$), diámetro medio cuadrático (dg , cm), altura dominante estimada como el promedio de los 25 árboles de mayor diámetro en el sitio (H_0 , m) (Assmann, 1970), diámetro dominante calculado como el promedio de los 25 árboles de mayor diámetro (D_0 , cm) (Assmann, 1970) e Índice de *Hart* (%) obtenido mediante la siguiente expresión:

$$IH = 10000 / \sqrt{N(H_0)}.$$

Modelos

Se analizaron y compararon 10 ecuaciones locales y 10 ecuaciones generalizadas para describir la relación $h-d$ (Cuadro 2). El ajuste fue individual por especie y en grupo (todas las del género *Pinus*), mediante mínimos cuadrados ordinarios no lineales (ONLS) con el programa R (R Core Team, 2016) por medio de la función “nlsLM” del paquete *minpack.lm* (Elzhov *et al.*, 2012).



Cuadro 2. Ecuaciones locales y generalizadas $h-d$ analizadas.

(Ecuación) Referencia	Expresión
Locales	
(1) Bates y Watts (1980)	$h = 1.3 + b_0 \cdot \left(\frac{d}{b_1 + d} \right)$
(2) Burkhardt y Strub (1974)	$h = 1.3 + b_0 \cdot e^{\left(\frac{b_1}{d}\right)}$
(3) Meyer (1940)	$h = 1.3 + b_0 \cdot (1 - e^{-b_1 \cdot d})$
(4) Stage (1975)	$h = 1.3 + b_0 \cdot d^{b_1}$
(5) Huang <i>et al.</i> (1992)	$h = 1.3 + b_0 \cdot \ln(b_1 \cdot d + 1)$
(6) Huang <i>et al.</i> (1992)	$h = 1.3 + b_0 \cdot e^{(b_1 \cdot d)}$
(7) Wykoff <i>et al.</i> (1982)	$h = 1.3 + e^{\left(b_0 + \frac{b_1}{d+1}\right)}$
(8) Chapman-Richards (Uzoh, 2017)	$h = 1.3 + b_0 \cdot (1 - e^{-b_1 \cdot d})^{b_2}$
(9) Hossfeld (1822)	$h = 1.3 + \left(\frac{d^2}{b_0 + b_1 \cdot d + b_2 \cdot d^2} \right)$
(10) Weibull (1951)	$h = 1.3 + b_0 \cdot \left(1 - e^{-b_1 \cdot d^{b_2}} \right)$
Generalizadas	

- (11) Sharma y Parton (2007)
$$h = 1.3 + b_0 \cdot H_0^{b_1} \left(1 - e^{-b_2(N/G)^{b_3} \cdot d} \right)^{b_4}$$
- (12) Cox I (López *et al.*, 2003)
$$h = e^{(b_0 + b_1 \cdot \ln(d_g) + b_2 \cdot \ln(N) + b_3 \cdot \sqrt{d})}$$
- (13) Cox II (López *et al.*, 2003)
$$h = b_0 + b_1 \cdot H_0 + b_2 \cdot D_0 + b_3 \cdot e^{b_4 \cdot d} + b_5 \cdot H_0^{b_6} \cdot e^{b_4 \cdot d} + b_7 \cdot d_g^{b_8} \cdot e^{b_4 \cdot d}$$
- (14) Sharma y Parton (2007)
$$h = 1.3 + b_0 \cdot H_0^{b_1} \left(1 - e^{-b_2 D_0^{b_3} \cdot d} \right)^{b_4}$$
- (15) Schröder y Álvarez I (López *et al.*, 2003)
$$h = 1.3 + (b_0 + b_1 \cdot H_0 - b_2 \cdot d_g) \cdot e^{-b_3/\sqrt{d}}$$
- (16) Schröder y Álvarez II (López *et al.*, 2003)
$$h = 1.3 + (b_0 + b_1 \cdot H_0 - b_2 \cdot d_g + b_3 \cdot G) \cdot e^{-b_4/\sqrt{d}}$$
- (17) Mirkovich (1958)
$$h = 1.3 + (b_0 + b_1 \cdot H_0 - b_2 \cdot d_g) \cdot e^{-b_3/d}$$
- (18) Harrison (López *et al.*, 2003)
$$h = H_0 \cdot (1 + b_0 \cdot e^{b_1 \cdot H_0}) \cdot \left(1 - e^{\frac{-b_2 \cdot d}{H_0}} \right)$$
- (19) Pienaar (López *et al.*, 2003)
$$h = b_0 \cdot H_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-b_1 \cdot d}{d_g}} \right)^{b_2}$$
- (20) Hui y Gadow (López *et al.*, 2003)
$$h = 1.3 + b_0 \cdot H_0^{b_1} \cdot d^{b_2 \cdot H_0^{b_3}}$$

h = Altura total (m); d = Diámetro normal (cm); H_0 = Altura dominante (m); D_0 = Diámetro dominante (cm); N = Densidad (número de árboles ha⁻¹); G = Área basal total (m² ha⁻¹); d_g = Diámetro medio cuadrático (cm); \ln = Logaritmo natural; b_i = Parámetros estimados.

La evaluación de la capacidad de ajuste se basó en gráficos de los residuos, comparaciones numéricas de la raíz del error medio cuadrático (*RMSE*), valores del coeficiente de determinación (R^2), del sesgo promedio de los residuales (*Em*) y el criterio de información Bayesiano de *Schwarz* (*BIC*) (Schwarz, 1978) que compara las ecuaciones en términos de su parsimonia (simplicidad). La formulación de estos estadísticos se expresa de la manera siguiente:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k}} \quad (21)$$

$$R^2 = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \bar{y})^2} \right] \quad (22)$$

$$Em = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (23)$$

$$BIC = n \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-k)}\right) + k \ln(n) \quad (24)$$

Donde:

y_i , \hat{y}_i y \bar{y} = Altura observada, estimada y la media observada

n = Número de observaciones

k = Número de parámetros de la ecuación

\ln = Logaritmo natural

Para aquellas ecuaciones locales que comparativamente presentaron mayor ventaja en los estadísticos de bondad de ajuste, se analizó la relación entre los parámetros y las variables del sitio (covariables), con la finalidad de explicar mejor la variabilidad entre la altura total y las características del rodal. Con la inclusión de las covariables en el modelo base también se probaron diferentes combinaciones de las variables del rodal y sus transformaciones (cuadrado, logaritmo, raíz, inverso, etcétera) con el fin de mejorar los ajustes. La relación se analizó mediante la función “cor” de R (R Core Team, 2016) y por análisis gráficos.

Modelo de efectos mixtos

Si bien los pares de datos *h-d* utilizados en el ajuste de las ecuaciones, se obtuvieron de diferentes unidades de muestreo; se detectó una correlación alta entre las mediciones tomadas dentro de una misma unidad, lo que viola uno de los supuestos fundamentales de la teoría de la regresión. Para tomar en cuenta la falta de independencia entre observaciones, se utilizó la técnica de modelos de efectos mixtos, en la cual la variabilidad entre unidades de muestreo se explica mediante la introducción de un parámetro aleatorio, que se estima de forma simultánea a los parámetros fijos (Pinheiro y Bates, 1998; Calama y Montero, 2004; Castedo *et al.*, 2006).

El vector de los parámetros de un modelo mixto no lineal puede ser definido de acuerdo con Pinheiro y Bates, (1998) de la manera siguiente:

$$y_{ij} = f(\boldsymbol{\phi}_i, x_{ij}) + \varepsilon_{ij}; \quad \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{A}_i \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B}_i \mathbf{b}_i \quad (25)$$

Donde:

y_{ij} = La j -ésima altura total (árbol) tomada de i -ésima unidad muestral

x_{ij} = La j -ésima medición de la variable predictora (d y variables del sitio) tomada de i -ésima unidad muestral

El vector ϕ_i se puede dividir en componentes fijos y aleatorios. Los fijos son comunes para toda la población y los aleatorios varían de parcela en parcela con la forma:

$$\phi_i = A_i\lambda + B_i b_i$$

Donde:

ϕ_i = Vector de parámetros $rx1$ (r es el número total de parámetros en el modelo) específico para la j -ésima unidad muestral

f = Función no lineal

ε_{ij} = Error aleatorio en forma de vector $y_i = f(\phi_i, x_i) + \varepsilon_i$.

λ = Vector $px1$ de los parámetros fijos (p el número de parámetros fijos)

b_i = Vector $qx1$ de los parámetros aleatorios asociados con la i -ésima unidad (q es el número de parámetros aleatorios)

A_i y B_i = matrices de tamaño rxp y rxq para los efectos fijos y aleatorios específicos para la i -ésima unidad, respectivamente

Los supuestos teóricos básicos de los modelos mixtos no lineales asumen que el vector de los residuales (ε_i) y el vector del efecto aleatorio (b_i) tienen una distribución normal con media igual a cero y una matriz de varianzas-covarianzas (R_i y D) que representa la variabilidad entre las distintas unidades de muestreo (Littell *et al.*, 2006).

Estimación de los parámetros aleatorios

Los parámetros aleatorios del modelo se calcularon mediante la aproximación marginal de máxima verosimilitud del mejor predictor lineal empírico insesgado (EBLUP) (Vonesh y Chinchilli, 1997), a partir de la expansión de la serie de Taylor con el algoritmo de Lindstrom y Bates (1990) implementado en la función “*nlme*” de R (R Core Team, 2016).

La construcción de la ecuación generalizada con inclusión de efectos mixtos se basó en la selección de la ecuación local que mejor bondad de ajuste presentó para todas las especies estudiadas. Así, se probaron diferentes combinaciones de parámetros fijos y aleatorios en cada ecuación, y se compararon los estadísticos *RMSE*, R^2 , *Em* y *BIC*, a fin de determinar cuál o cuáles parámetros fijos deberían ser considerados como mixtos. La ecuación *h-d* generada de esta forma se comparó con la mejor ecuación generalizada.

Predicción de los parámetros aleatorios

Para la aplicación del modelo de efectos mixtos, se necesita información previa de la variable de respuesta (altura total del árbol) que posteriormente se utiliza para calcular los parámetros aleatorios específicos de esa unidad muestral. Las alturas medidas de uno o más árboles en cada sitio son factibles de usarse para predecir los parámetros aleatorios específicos para esa unidad muestral y ajustar la parte fija del modelo de efectos mixtos (respuesta media de la población) a las condiciones del sitio. Esto se conoce como localización o calibración del modelo de efectos mixtos (Sharma *et al.*, 2016).

Cuando se dispone de una submuestra de m_j alturas de árboles, estas pueden utilizarse para predecir los parámetros aleatorios del vector b_j , con la ecuación siguiente (Vonesh y Chinchilli, 1997):

$$\hat{b}_i = \hat{D}\hat{Z}_i^T(\hat{R}_i + \hat{Z}_i\hat{D}\hat{Z}_i^T)^{-1}\hat{\varepsilon}_i \quad (26)$$

Donde:

\hat{D} = Matriz $q \times q$ de varianzas-covarianzas asociada a los parámetros aleatorios (q es el número de parámetros aleatorios incluidos en el modelo), común para todas las unidades y estimado en el ajuste general del modelo

\hat{R}_i = Matriz $m_j \times m_j$ de varianzas-covarianzas del término del error del modelo

$\hat{\varepsilon}_i$ = Vector de los residuales $m \times 1$, cuyos componentes se obtienen por la diferencia entre la altura observada de cada árbol y el valor predicho utilizando el modelo solo con los parámetros fijos

Z_i = Matriz $m \times q$ de las derivadas parciales de los parámetros aleatorios evaluados en $\hat{b}_i = 0$

Para determinar el tamaño óptimo de la submuestra de árboles por medir dentro de cada unidad muestral y obtener la respuesta de la calibración (RC), se analizaron las siguientes opciones:

- (1) *RC1*: Medir la altura total de un árbol y el diámetro normal mínimo de cada unidad muestral
- (2) *RC2*: Medir la altura total de dos árboles, junto con el diámetro normal mínimo y promedio de cada unidad
- (3) *RC3*: Medir la altura total de tres árboles junto con el diámetro normal mínimo, promedio y máximo de cada unidad
- (4) *RC4*: Medir la altura total de un árbol de clase media (seleccionado como el promedio entre el diámetro normal mínimo y el diámetro normal promedio de cada unidad)

(5) *RC5*: Medir la altura total de dos árboles de clase media (seleccionados como el promedio entre el diámetro normal mínimo y diámetro normal promedio y, promedio entre el diámetro normal promedio y el diámetro normal máximo de cada unidad)

(6) *RC6*: Medir la altura total de *tres* árboles de clase media (seleccionados como el diámetro normal promedio y los dos árboles seleccionados en la opción *RC5* en cada unidad)

Las seis alternativas descritas se evaluaron en términos del *RMSE*, R^2 y *Em* y se compararon con los estadísticos obtenidos mediante las ecuaciones ajustadas con el procedimiento *ONLS* y *NLME* (i.e. cuando se incluye a todos los árboles de la unidad).

Las predicciones de las alturas de los árboles en las diferentes opciones de calibración evaluadas, se calcularon con el método para estimar los parámetros aleatorios a través de la expresión siguiente:

$$\hat{h}_{ij} = f(\hat{\phi}_i, x_{ij}) \dots \dots \dots (27)$$

Donde:

\hat{h}_{ij} = Altura total estimada (m)

$\hat{\phi}_i = A_i \hat{\lambda}$

$\hat{\lambda}$ = Matrices para los efectos fijos y aleatorios específicos para la *i*-ésima unidad muestral, respectivamente

x_{ij} = Vector de las variables predictoras

Resultados y Discusión

Ecuaciones locales y generalizadas

Para seleccionar la ecuación local y generalizada que mejor bondad de ajuste presentó de manera individual para cada taxon, en primera instancia se ajustaron todas las ecuaciones del Cuadro 2 por especie. Durante esta etapa, se identificaron problemas de convergencia y parámetros no significativos para algunas de ellas (*Pinus ayacahuite*, *P. herrerae*, *P. lumholtzii* y *P. douglasiana*) con las ecuaciones (10), (13) y (17); por lo tanto, se decidió realizar los análisis posteriores con la base de datos conjunta para todas los taxa.

Al comparar los valores de los estadísticos de bondad de ajuste del grupo de ecuaciones locales (Cuadro 3), las ecuaciones (3), (8), (9) y (10) resultaron ser las más precisas y con el menor sesgo. Si bien, proporcionaron valores muy similares en los estadísticos de comparación utilizados, la ecuación (3) tuvo parámetros no significativos en el ajuste, aun cuando el valor del *BIC* fue ligeramente menor al resto de las ecuaciones. Finalmente, los análisis gráficos del sesgo en la estimación de la altura por clases diamétricas indicaron que la ecuación (8) evidenció el mejor comportamiento en todo el intervalo de datos, por lo que fue seleccionada como el modelo base para estudiar la inclusión de variables de rodal en su estructura (Figura 1a).



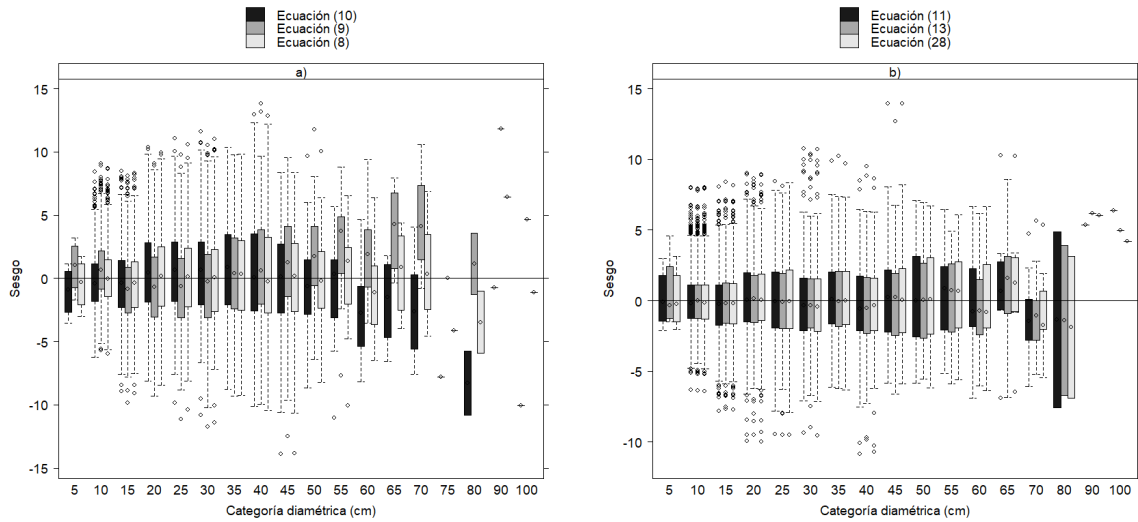


Figura 1. Comportamiento del sesgo por clase diamétrica de las ecuaciones locales y generalizadas con mejor bondad de ajuste.

Huang *et al.* (2000) y Peng *et al.* (2001) señalan que la ecuación (8) de *Chapman-Richards* es quizás la más flexible y versátil para modelar la relación $h-d$ en rodales forestales. Al respecto, Uzoh (2017) demostró es estadísticamente la más robusta (*i.e.* menor sesgo) de entre 12 distintas opciones para estimar la altura de *Pinus ponderosa* Douglas ex Lawson en un modelo de efectos mixtos en el oeste de los Estados Unidos de América.

Al comparar los valores de los estadísticos de bondad de ajuste del grupo de ecuaciones generalizadas (Cuadro 3), se advierte que las ecuaciones (11) y (13) son las más precisas, al considerar los estadísticos R^2 y $RMSE$. Sin embargo, la ecuación (13) exhibió parámetros no significativos, aun cuando resulta el valor más bajo del BIC . Por lo tanto, la ecuación generalizada de Sharma y Parton (2007) (11) presentó mejores ventajas en precisión y parsimonia (BIC) del total evaluadas; además, los análisis gráficos del comportamiento del sesgo al estimar las alturas por clases diamétricas tuvieron un comportamiento insesgado (Figura 1b). Esta ecuación es bastante flexible para describir la relación $h-d$, y ha sido ampliamente usada en estudios similares (Vargas *et al.*, 2009; Crecente *et al.*, 2010; Corral *et al.*, 2014).

Cuadro 3. Valores de los estadísticos de bondad de ajuste de las ecuaciones locales y generalizadas ajustadas a los datos *h-d* de siete especies del género *Pinus*.

Ecuación	Locales				Ecuación	Generalizadas			
	<i>RMSE</i>	<i>R</i> ²	<i>Em</i>	<i>BIC</i>		<i>RMSE</i>	<i>R</i> ²	<i>Em</i>	<i>BIC</i>
(1)	2.95	0.731	-0.011	20 298	(11)	2.44	0.816	-0.017	18 680
(2)	3.11	0.701	0.099	20 616	(12)	2.86	0.747	-0.100	19 965
(3)	2.95	0.731	-0.001	20 192	(13)	2.42	0.819	0.006	18 652
(4)	2.99	0.724	-0.038	20 297	(14)	2.45	0.815	-0.020	18 713
(5)	2.96	0.730	-0.017	20 208	(15)	2.47	0.812	-0.006	18 767
(6)	3.64	0.590	-0.173	21 897	(16)	2.46	0.813	-0.007	18 755
(7)	3.07	0.709	0.085	20 516	(17)	2.55	0.799	0.045	19 028
(8)	2.95	0.731	0.004	20 200	(18)	2.52	0.804	-0.013	18 933
(9)	2.95	0.731	0.004	20 200	(19)	2.52	0.804	0.066	18 916
(10)	2.95	0.731	0.004	20 200	(20)	2.51	0.805	-0.045	18 911

RMSE = Raíz del error medio cuadrático; *R*² = Coeficiente de determinación; *Em* = Sesgo promedio; *BIC* = Criterio de información Bayesiano de Schwarz.

Los mejores en términos de precisión y parsimonia resultan de las ecuaciones generalizadas (Cuadro 3), debido a que incluyen características del rodal como variables predictoras, con lo que disminuye la variabilidad dentro de cada unidad muestral, y, en general, son ampliamente recomendadas para describir la relación *h-d* (López *et al.*, 2003; Barrio *et al.*, 2004; Canga *et al.*, 2007; Vargas *et al.*, 2009; Crecente *et al.*, 2010; Corral *et al.*, 2014; Uzoh, 2017).

El análisis de correlación entre variables del rodal con los parámetros de la ecuación (8) (Cuadro 4) indicó que solo tres de ellas (*H*₀, *N* y *G*) se correlacionaron de manera significativa para mejorar su precisión, de lo que resultó la ecuación generalizada con la expresión siguiente:

$$h_{ij} = 1.3 + b_0[\ln(H_0)^{b_1}] [(1 - e^{-b_2 \cdot d})^{b_3}] [N/G]^{b_4} \quad (28)$$

Donde:

$b_0 - b_4$ = Parámetros de la ecuación; el resto de las variables previamente definidas

Cuadro 4. Correlación entre los estimadores de la ecuación (8) y las variables del rodal.

Variable	b_0	b_1	b_2	N	G	d_g	H_0	D_0	IH
b_0	1.00								
b_1	-0.51	1.00							
b_2	0.32	-0.50	1.00						
N	0.32	-0.05	0.41	1.00					
G	0.46	-0.31	0.35	0.60	1.00				
d_g	0.10	-0.14	-0.59	-0.58	0.11	1.00			
H_0	0.47	-0.38	0.08	0.23	0.79	0.46	1.00		
D_0	0.50	-0.38	-0.01	0.13	0.76	0.61	0.87	1.00	
IH	-0.42	0.16	-0.30	-0.65	-0.72	0.06	-0.72	-0.60	1.00

Donde:

H_0 = Altura dominante (m)

D_0 = Diámetro dominante (cm)

N = Densidad (número de árboles ha⁻¹)

G = Área basal total (m² ha⁻¹)

d_g = Diámetro medio cuadrático (cm)

IH = Índice de *Hart* (%)

b_i = Parámetros estimados

Con la inclusión de la altura dominante, el área basal y la densidad del rodal, además del diámetro normal en la ecuación (28), la *RMSE* se redujo 18 % con respecto al modelo base de *Chapman-Richards* (ecuación 8) (de 2.95 m a 2.43 m) y, por consecuencia, el valor de la R^2 se incrementó 12 % (de 0.731 a 0.818). El valor del *BIC* se redujo 8 % (de 20 200 a 18 651) dado que en su expresión considera la suma total de los cuadrados residuales.

Por otra parte, al comparar la precisión y parsimonia de la ecuación (28) respecto a la ecuación (11) desarrollada por Sharma y Parton (2007), esta también tuvo una mejoría marginal, ya que la *RMSE* disminuyó en un 0.4 % y el valor de la R^2 aumentó 0.16 %, en tanto que *BIC* tuvo una reducción de 1.5 %.

Con base en los estadísticos de bondad de ajuste y en el comportamiento gráfico del sesgo por clase diamétrica (Figura 1b), la ecuación (28) se consideró el modelo base para ajustarla mediante la técnica de efectos mixtos en la relación *h-d* de las siete especies estudiadas. Dicha expresión incluye a la altura dominante como un indicador de la productividad, al área basal como una medida simple y objetiva de la ocupación de los árboles y que en general es mejor que el número de árboles por hectárea, ya que combina este con su tamaño (Huang *et al.*, 2009), y el número de árboles genera predicciones sujetas a cambios instantáneos de acuerdo con los aclareos o intervenciones silvícolas a los que son sometidas las masas (Crecente *et al.*, 2010). Esas variables las han utilizado en la modelación de la relación *h-d* diversos autores, para una diversidad amplia de taxones (López *et al.*, 2003; Calama y Montero, 2004; Canga *et al.*, 2007; Crecente *et al.*, 2010; Corral *et al.* 2014; Sharma y Breidenbach, 2015).



Modelo de efectos mixtos

En el ajuste de la ecuación (28), se observó que los parámetros con mayor variabilidad fueron los que definen a la asíntota y la forma de la curva $h-d$ (Cuadro 5). Por lo tanto, en un primer paso se ajustó con los parámetros que definen la asíntota (b_0, b_1) y la forma (b_3, b_4) como aleatorios; sin embargo, al no obtener convergencia, se probaron varias combinaciones con uno y dos parámetros aleatorios asociados a los parámetros fijos hasta lograr la convergencia.

La mejor combinación resultó al asociar el parámetro de forma (b_3) con uno aleatorio u_i de forma aditiva (b_3+u_i) . Resultados similares consignan Sharma y Parton (2007), Vargas *et al.* (2009) y Corral *et al.* (2014), quienes consideraron solo un parámetro aleatorio dentro del modelo mixto.

El modelo final generalizado con efectos mixtos se expresa de la manera siguiente:

$$h_{ij} = 1.3 + b_0 \ln(H_0)^{b_1} (1 - e^{-b_2 \cdot d_{ij}})^{(b_3+u_j)} (N/G)^{b_4} + \varepsilon_{ij} \quad (29)$$

Donde:

$b_0 - b_4$ = Parámetros fijos (comunes a todas las unidades muestrales)

$u_j \sim N[0, \sigma_u]$ = Parámetro aleatorio (específico para cada unidad muestral) con una distribución normal con media igual a cero y varianza debida al efecto aleatorio (σ_u^2)

h_{ij} y ε_{ij} = Altura total y error estimados por el modelo para la i -ésima observación (árbol) de la j -ésima unidad muestral.

El modelo de efectos mixtos (ecuación 29) registró una mejora en precisión de 6.6 % en el valor de la $RMSE$, con respecto al modelo base (ecuación 28); además, con la inclusión del parámetro aleatorio entre las unidades muestrales, se logró un incremento de 2.8 % sobre el valor de R^2 , al explicar la variabilidad observada. El

valor del sesgo promedio en ambas ecuaciones fue similar; pero, el *BIC*, que evalúa la simplicidad del modelo, se redujo 2.9 % (Cuadro 5).

Cuadro 5. Parámetros y estadísticos de bondad del ajuste de los modelos base y con efectos mixtos seleccionado.

Parámetro	Modelo base Ecuación (28)	Modelo de efectos mixtos Ecuación (29)
Parámetros fijos		
b_0	3.131	7.689
b_1	1.858	1.324
b_2	0.031	0.029
b_3	1.017	1.023
b_4	0.071	-0.023
Componentes de la varianza		
σ^2		5.196
σ^2_u		0.011
Bondad del ajuste		
<i>RMSE</i>	2.430	2.270
R^2	0.818	0.841
<i>Em</i>	-0.009	-0.009
<i>BIC</i>	18651	18 101

La Figura 2a ilustra la dispersión de los residuos frente a las alturas predichas con la ecuación (29); se observa una varianza homogénea en todo el intervalo de datos, además de que no existe un patrón sistemático en la variabilidad de los residuos. Por lo tanto, el efecto aleatorio ayudó a eliminar la heterogeneidad en la varianza (Fang

y Bailey, 2001). El respectivo gráfico de residuos frente al primer retraso (Figura 1b), no evidencia una tendencia que muestre autocorrelación, lo que indica que se le removió cuando el efecto aleatorio entre unidades muestrales fue modelado al expandir el parámetro b_3 .

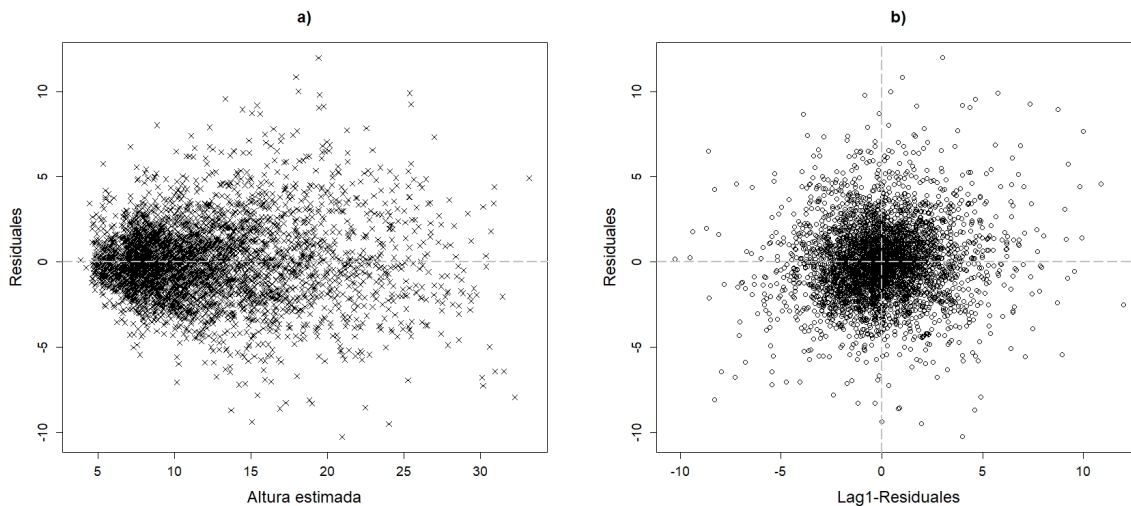


Figura 2. Residuales frente a las alturas predichas (a), residuales frente al primer retraso (b) estimados con la ecuación 29.

Calibración del modelo

Los resultados de las alternativas de calibración para mejorar las predicciones se muestran en el Cuadro 6. Los valores más altos de la *RMSE* se obtuvieron al incluir una submuestra de uno a tres árboles con categorías diamétricas extremas (mínimo y máximo). En contraste, con la inclusión de individuos pertenecientes a categorías diamétricas centrales a la distribución, se identificó una ligera reducción en la *RMSE*. Pese a que no existe una metodología para la definición del tamaño de muestra más apropiado en la calibración de un modelo de efectos mixtos, se advierte que la alternativa *RC6* resultó con más precisión, cuando se mide la altura total de una submuestra de tres árboles seleccionados al azar con diámetros cercanos al segundo cuartil de la estructura

diamétrica del sitio, dado que presentó una reducción de 4.6 % en la *RMSE* respecto al valor estimado durante el ajuste de la ecuación (28) por *ONLS*. Este valor fue muy cercano al generado por el ajuste del modelo de efectos mixtos (medición de la altura total de todos los árboles) de la ecuación (29) por el procedimiento *NLME*.

Cuadro 6. Comparación del *RMSE* de las alternativas de calibración de la ecuación (29).

Alternativa	<i>RMSE</i>	% reducción de la <i>RMSE</i>
Ecuación 28 (<i>ONLS</i>)	2.430	-
Ecuación 29 (<i>NLME</i>)	2.270	-6.6
<i>RC1</i> (altura de 1 árbol)	2.454	1.0
<i>RC2</i> (altura de 2 árboles)	2.449	0.8
<i>RC3</i> (altura de 3 árboles)	2.461	1.3
<i>RC4</i> (altura de 1 árbol)	2.428	-0.1
<i>RC5</i> (altura de 2 árboles)	2.424	-0.2
<i>RC6</i> (altura de 3 árboles)	2.319	-4.6

El modelo de efectos mixtos registró un incremento en la precisión, debido a que incluye la variabilidad que existe en la altura total de los árboles dentro y entre parcelas (Calama y Montero, 2004). En virtud de que los bosques mezclados tienen una variabilidad mayor en la altura total de los árboles, con respecto a aquellos que provienen de rodales con una o dos especies, se estima que las predicciones del modelo de efectos mixtos desarrollado son aceptables, ya que explican 82 % de la variabilidad de los datos. En experiencias con datos correspondientes a masas regulares se ha logrado una capacidad de predicción cercana a 90 % (Calama y Montero, 2004; Diéguez *et al.*, 2005; López *et al.*, 2012).

La calibración de los modelos de efectos mixtos es una ventaja para los manejadores forestales, ya que a partir de pocos árboles es posible determinar la altura de todos los individuos presentes en el rodal. Calama y Montero (2004) proponen cuatro

árboles seleccionados aleatoriamente; Corral *et al.* (2014) definen que tres árboles cercanos a 10 % del diámetro promedio son suficientes; mientras que Castedo *et al.* (2006) y Crecente *et al.* (2010) proponen los tres árboles más pequeños de la estructura diamétrica del rodal. A medida que sea mayor el número de árboles seleccionados para calibrar un modelo de efectos mixtos, por lo general, se reduce la *RMSE* y mejora su capacidad predictiva; sin embargo, lo anterior no siempre se justifica debido a que se incrementa el costo de muestreo, por lo que la calibración con una muestra pequeña de árboles es la principal utilidad de los modelos de efectos mixtos para su aplicación en el campo forestal (Castedo *et al.*, 2006).

Conclusiones

Mediante una ecuación generalizada se describe la relación *h-d* a partir del modelo de crecimiento de *Chapman-Richards*, en el que, además del diámetro normal, se incluyen las variables del rodal, la altura dominante, el número de árboles por hectárea y el área basal. Posteriormente, se mejoró la precisión de la ecuación (6.6 %) y se incluyó un parámetro aleatorio que toma en cuenta la variabilidad existente entre las unidades muestrales, mediante el desarrollo de la metodología de modelos mixtos. Se analizaron diferentes alternativas para la estimación del parámetro aleatorio para el uso práctico del modelo (proceso de calibración), a partir de una pequeña proporción de alturas obtenidas de árboles de cada unidad muestral; de ello resultó que las estimaciones derivadas de la medición de los tres árboles promedio de la estructura diamétrica del rodal es la óptima, y se reduce el error en 4.6 %.

El modelo de efectos mixtos desarrollado tiene las ventajas siguientes: (i) el mismo esfuerzo de muestreo genera menos error que un modelo básico ajustado por *ONLS*; (ii) puede usarse en los inventarios forestales convencionales para estimar las alturas que no se miden en los sitios de muestreo; y (iii) es posible incluirlo en un modelo dinámico de crecimiento forestal.

Agradecimientos

Los autores agradecen a las autoridades ejidales de la Umafor 1005 Santiago Papasquiario y Anexos por las facilidades otorgadas en los trabajos de campo.

Conflicto de intereses

Los autores manifiestan no tener conflicto de intereses.

Contribución por autor

Sacramento Corral Rivas y Alma Mireya Silva Antuna: análisis de datos y redacción del documento; Gerónimo Quiñonez Barraza: revisión del documento.

Referencias

Assmann, E. 1970. The principles of forest yield study: studies in the organic production, structure, increment and yield of forest stands. Pergamon Press. New York, NY, USA. 506 p.

Barrio A., M., J. G. Álvarez G., I. J. Díaz M. y C. A. López S. 2004. Relación altura diámetro generalizada para *Quercus Robur* L. en Galicia. Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales 18: 141-146.

Bates, D. M., and Watts, D. G. 1980. Relative curvature measures of nonlinearity. Journal of the Royal Statistical Society Series B 42(1):1-25.

Burkhart, H. E., and M. R. Strub. 1974. A model for simulation of planted loblolly pine stands. *In*: Fries, J. (ed.). *In* growth models for tree and stand simulation. Royal College of Forestry. Stock-holm, Swaden. pp. 128-135.

- Calama, R. and G. Montero. 2004. Interregional nonlinear height–diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. *Canadian Journal of Forest Research* 34: 150-163. doi: 10.1139/X03-199.
- Canga, L. E., E. Afif K., J. Gorgoso V. y A. Cámara O. 2007. Relación altura-diámetro generalizada para *Pinus radiata* D. Don en Asturias (norte de España). *Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales* 23: 153-158.
- Castedo, D. F., U. Diéguez A., M. Barrio A., M. Sánchez R. and K. V. Gadow. 2006. A generalized height-diameter model including random components for *radiata pine* plantations in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management* 229: 202–213. doi: 10.1016/j.foreco.2006.04.028.
- Corral, R. S., J. G. Álvarez G., F. Crecente C. and J. J. Corral R. 2014. Local and generalized height-diameter models with random parameters for mixed, uneven-aged forests in Northwestern Durango, Mexico. *Forest Ecosystems* 1(6): 1–9. doi: 10.1186/2197-5620-1-6.
- Crecente, C. F., M. Tomé, P. Soares and U. Diéguez A. 2010. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management* 259: 943-952. /doi.org/10.1016/j.foreco.2006.04.028.
- Diéguez, A. U., M. Barrio A., F. Castedo D. y J.G. Álvarez G. 2005. Relación altura-diámetro generalizada para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de repoblación en el Noroeste de España. *Investigación Agraria. Sistemas y Recursos Forestales* 14(2): 229-241.
- Elzhov, T. V., K. M. Mullen, A. N. Spiess and B. Bolker. 2012. Minpack.lm: R interface to the Levenberg-Marquardt nonlinear least-squares algorithm found in MINPACK, plus support for bounds. R package version 1.1-6. <http://CRAN.R-project.org/package=minpack.lm>.

Fang, Z. and R. L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *Forest Science* 47: 287–300. <https://doi.org/10.1093/forestscience/47.3.287>.

Fox, J., P. Ades and H. Bi. 2001. Stochastic structure and individual-tree growth models. *Forest Ecology and Management* 154: 261–276. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(00\)00632-0](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(00)00632-0).

García M., E. 1981. Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen. 4ª Ed. Instituto de Geografía, Universidad Nacional Autónoma de México. México, D.F., México. 500 p.

Gregoire, T. G. 1987. Generalized error structure for forestry yield models. *Forest Science* 33: 423–444. <https://doi.org/10.1093/forestscience/33.2.423>.

Guerra de la C., V., F. Islas G., E. Flores A., M. Acosta M., E. Buendía R., F. Carrillo A., J. C. Tamarit U. y T. Pineda O. 2019. Modelos locales altura-diámetro para *Pinus montezumae* Lamb. y *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl. en Nanacamilpa, Tlaxcala. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 10(51): 133-156. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v10i51.407>.

Hernández R., J., X. García C., A. Hernández R., J. J. García M., H. J. Muñoz F., C. Flores L. y G. G. García E. 2015. Ecuaciones altura-diámetro generalizadas para *Pinus teocote* Schlecht. & Cham. en el estado Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 6(31): 8-21. doi: 10.29298/rmcf.v6i31.192.

Hossfeld, J. W. 1822. *Mathematik für Forstmänner, Kameralisten und Oekonomen: Praktische Geometrie. Bierter Band.* Gotha, Thüringen, Deutschland. 472 p.

Huang, S., S. Titus and D. Wiens. 1992. Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research* 22: 1297-1304. doi: 10.1139/x92-172.

- Huang, S., D. Price and S. J. Titus. 2000. Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests. *Forest Ecology Management* 129 (1): 125-141. doi: 10.1016/S0378-1127(99)00151-6.
- Huang, S., S. Meng and Y. Yang. 2009. Using nonlinear mixed model technique to determine the optimal tree height prediction model for Black spruce. *Modern Applied Science* 3(4). 1-18. doi: 10.5539/mas.v3n4p3.
- Lindstrom, M. J. and D. M. Bates. 1990. Nonlinear mixed effects for repeated measures data. *Biometrics* 46: 673-687. doi: 10.2307/2532087.
- Littell, R. C., A. Milliken G., W. Stroup W., D. Wolfinger D. and O Schabenberger. 2006. *SAS for mixed models*. 2nd ed.: SAS Institute. Cary, NC, USA. 814 p.
- López S., C. A., J. G. Varela., F. Castedo D., A. R. Alboreca, R. Rodríguez S., J. G. Álvarez G. and F. S. Rodríguez. 2003. A height-diameter model for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Annals of Forest Science* 60: 237-245. doi: 10.1051/forest:2003015.
- López S., C. A., R. Rodríguez S. y J. G. Álvarez G. 2012. Relación altura-diámetro con parámetros aleatorios para rodales regulares de *k Pseudotsuga menziesii* en el norte de España. *Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales* 34: 135-140. <https://doi.org/10.31167/csef.v0i34>
- Luján Á., C., J. M. Olivas G., H. G. González H., S. Vázquez Á., J. C. Hernández D. y H. Luján Á. 2016. Desarrollo forestal comunitario sustentable en la región norte de México y su desafío en el contexto de la globalización. *Madera y Bosques* 22(1):37-51. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-04712016000100037 (15 de diciembre de 2018).
- Meyer, H.A., 1940. A mathematical expression for height curves. *Journal of Forestry* 38(5): 415-420.

- Mirkovic, D. 1958. Normale visinske krive za chrast kitnak i bukvu v NR Srbiji. Zagreb: Glasnik sumarskog fakulteta. Cited in: Wenk, G., V. Antanaitis and S. Smelko. Waldetragslehre. Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, Germany. 448 p.
- Návar, J., F. de J. Rodríguez F. y P.A. Domínguez C. 2013. Taper functions and merchantable timber for temperate forests of northern Mexico. *Annals of Forest Research* 56(1): 165-178. doi: 10.15287/afr.2013.51.
- Peng, C. H., L. Zhang. and J. Liu. 2001. Developing and validating nonlinear height-diameter models for major tree species of Ontario's boreal forests. *North Journal Applied Forest* 18(3):87-94. <https://doi.org/10.1093/njaf/18.3.87>.
- Pinheiro, J. C. and D. M. Bates. 1998. Model building for nonlinear mixed effects model. Department of Biostatistics and Department of Statistics, University of Wisconsin. Madison, WI, USA. 11 p.
- Prodan, M., R. Peters., F. Cox and P. Real. 1997. *Mensura Forestal*. Costa Rica: Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA). San José, Costa Rica. 561 p.
- Quiñonez B., G., D. Zhao, H. M. De Los Santos P. and J. J. Corral R. 2018. Considering neighborhood effects improves individual dbh growth models for natural mixed-species forests in Mexico. *Annals of Forest Science*. 75: 78. doi: 10.1007/s13595-018-0762-2.
- R Core Team. 2016. R: A language and environmental for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org/> (18 de diciembre de 2018).
- Sharma, M. and J. Parton. 2007. Height-diameter equations for boreal tree species in Ontario using a mixed-effects modeling approach. *Forest Ecology and Management* 249: 187-198. doi:10.1016/j.foreco.2007.05.006.

Sharma, R. P and J. Breidenbach. 2015. Modeling height-diameter relationships for Norway spruce, Scots pine, and downy birch using Norwegian National Forest Inventory data. *Forest Science and Technology* 11(1): 44-53.

<https://doi.org/10.1080/21580103.2014.957354>.

Sharma, R. P., Z. Vacek and S. Vacek, 2016. Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic. *Journal of Forest Science* 62(10): 470-484. doi: 10.17221/41/2016-JFS.

Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics* 5(2):461-464.

Stage, A.R., 1975. Prediction of height increment for models of forest growth. Research Paper INT-164. USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, Ogden, UT, USA. 32 p.

Uzoh, F. 2017. Height-diameter model for managed even-aged stands of Ponderosa pine for the Western United States using hierarchical nonlinear mixed-effects model. *Australian Journal of Basic and Applied Science* 11(14): 69-87.

<https://doi.org/10.22587/ajbas.2017.11.14.10>.

Vargas L., B., F. Castedo D., J. G. Álvarez G., M. Barrio A. and F. Cruz C. 2009. A generalized height-diameter model with random coefficients for uneven-aged stands in El Salto, Durango (Mexico). *Forestry* 8 (4): 445-462.

<https://doi.org/10.1093/forestry/cpp016>.

Vargas L., B., J. J. Corral R., O. A. Aguirre C., J. O. López M., H. M., De los Santos P., F. J. Zamudio S. and C. G. Aguirre C. 2017. SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Revista Chapingo. Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3). doi: <http://dx.doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040>.

Vonesh, E. F. and V. M. Chinchilli. 1997. *Linear and Nonlinear Models for the Analysis of Repeated Measurements*. Marcel Dekker Inc., New York, NY, USA. 560 p.

Weibull, W. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics* 18: 293-297.

Wykoff, W. R., N. L. Crookston and A. R. Stage, 1982. User's guide to the stand prognosis model. US Forest Service General Technical Report INT 133. US Department of Agriculture, Intermountain Forest and Range Experiment Station, Ogden, UT, USA. 112 p.



Todos los textos publicados por la **Revista Mexicana de Ciencias Forestales** –sin excepción– se distribuyen amparados bajo la licencia *Creative Commons 4.0 Atribución-No Comercial (CC BY-NC 4.0 Internacional)*, que permite a terceros utilizar lo publicado siempre que mencionen la autoría del trabajo y a la primera publicación en esta revista.