



Artículo / Article

Sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial para plantaciones de *Pinus greggii* Engelm. en Hidalgo, México

Compatible taper-commercial volume system for *Pinus greggii* Engelm. plantations in Hidalgo State, Mexico

Jonathan Hernández-Ramos¹, Adrián Hernández-Ramos², José de Jesús García-Magaña³, Xavier García-Cuevas¹, Guadalupe Geraldine García-Espinoza⁴, Hipólito Jesús Muñoz-Flores¹ y Edgar Hugo Olvera-Delgadillo⁵

Resumen

La determinación de manera precisa del ahusamiento (d) y el volumen comercial (V_c) de los árboles es una herramienta útil para la planeación del manejo silvícola de las plantaciones forestales. Con el ajuste simultáneo de ecuaciones compatibles, d - V_c , se reduce la incertidumbre de la estimación volumétrica por tipo de producto. El objetivo fue ajustar un sistema compatible d - V_c para plantaciones forestales comerciales de *Pinus greggii* en Metztlán, Hidalgo, México. Con datos de altura total (H), diámetro normal (D_n), altura y diámetro a diferentes alturas (H_m y d) de 24 árboles se calculó el volumen total por el método de trozas traslapadas. Se utilizó el modelo de volumen total (V_t) de Schumacher-Hall y tres compatibles de d - V_c . Los modelos se ajustaron de manera simultánea con la técnica de máxima verosimilitud, en el programa estadístico SAS 9.2. El mejor sistema fue el general de Fang y Bailey, por presentar el mayor coeficiente de determinación ajustado (>0.95) y los valores más bajos de la raíz del cuadrado medio del error, en ambas variables. La corrección de heterocedasticidad se realizó ponderando los residuales, mientras que la autocorrelación se corrigió modelando la estructura de los errores mediante un modelo autorregresivo de segundo orden. Al graficar los valores predichos contra los observados, se tuvo una línea con tendencia a la recta y los sesgos para la muestra en $d = 3.8\%$ y en $V_c = 4.6\%$. El modelo es confiable para estimar de forma directa el diámetro a cualquier altura, y viceversa, y por consiguiente su volumen comercial.

Palabras clave: Aprovechamiento maderable, distribución de productos, manejo silvícola, método de trozas traslapadas, plantaciones comerciales, volumen total.

Abstract

The accurate determination of taper (d) and the commercial volume (V_c) of the trees is a useful tool for planning of forest plantations management. With the simultaneous fit of compatible equations, d - V_c , uncertainty of the volumetric estimation is reduced by type of product. The aim of this study was to fit a compatible d - V_c system for commercial forest plantations of *Pinus greggii* in Metztlán, Hidalgo, Mexico. With data of total height (H), normal diameter (D_n), height and diameter at different heights (H_m and d) of 24 trees, the calculation of total volume was made by the method of overlapping logs. Schumacher-Hall's total volume (V_t) model and three d - V_c compatible models were used. The models fitted simultaneously with the maximum likelihood technique, in the SAS 9.2 statistical program. The best system was the General Fang and Bailey, as it had the greatest fitted determination coefficient (>0.95) and the lowest root mean square error values in both variables. Heteroscedasticity correction was made by weighting the residuals, while autocorrelation was corrected by modeling the structure of errors by a second order autoregressive model. When making the graphics of the predicted values against those observed, a line with a straight tendency was formed and the bias of the simple in $d = 3.8\%$ and in $V_c = 4.6\%$. The model is reliable to estimate directly the diameter at any height and height to any diameter, and therefore, its commercial volume.

Key words: Timber harvest, product distribution, forest management, method of overlapping logs, commercial plantations, total volume.

Fecha de recepción/Reception date: 23 de junio de 2016; Fecha de aceptación/Acceptance date: 10 de diciembre de 2016.

¹ Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP). México.

² Colegio de Postgraduados (COLPOS). México.

³ Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). México. Correo-e: jegarma23@yahoo.com.mx

⁴ Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). México.

⁵ Comisión de Áreas Naturales Protegidas (CONANP). México.

Introducción

La estimación precisa de las existencias volumétricas y la distribución de productos son esenciales para planear la aplicación de prácticas silvícolas en las intensidades adecuadas, y en el momento oportuno, e indispensable para obtener el mayor retorno económico posible de la inversión efectuada en el establecimiento, mantenimiento y aprovechamiento de las plantaciones forestales comerciales (PFC), o en las actividades de aprovechamiento en bosque natural (Cancino, 1993; De la Fuente *et al.*, 1998; Zepeda y Acosta, 2000).

El uso correcto de herramientas silvícolas, precisas para el manejo orientado a obtener el máximo rendimiento de los productos permite la evaluación de las actividades silvícolas, en cualquier momento de su desarrollo (volumen e ingreso), y determina el punto óptimo de cosecha (ciclo de corta y turno) (Cancino, 1993; De la Fuente *et al.*, 1998; Zepeda y Acosta, 2000; Tamarit *et al.*, 2013).

En el cálculo del volumen total o por tipo de producto en cada unidad de superficie, previo a la cosecha, se requiere contar con un sistema preciso de cubicación del arbolado en pie, y una ecuación que determine el patrón de troceado, con el objetivo de maximizar el volumen o el valor de los productos obtenidos en los bosques naturales o las PFC (Cancino, 1993; De la Fuente *et al.*, 1998; Tamarit *et al.*, 2013). Dicho sistema es una herramienta básica en los inventarios forestales y en la planeación de las actividades de manejo (Corral-Rivas y Nívar-Cháidez, 2009).

A partir de las funciones de ahusamiento es factible describir la forma del fuste, calcular la altura comercial para cualquier diámetro límite deseado, estimar el volumen total, el volumen comercial y el volumen por trozas individuales por árbol; de manera general para una especie o plantaciones. Lo anterior permite realizar cálculos de las existencias volumétricas por unidad de superficie o rodal (Clutter *et al.*, 1983; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

De acuerdo a su complejidad matemática, estas funciones se clasifican por el número de variables utilizadas y la cantidad de coeficientes involucrados (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014), en modelos basados en polinomios, de tipo trigonométrico, exponenciales y segmentados (Tamarit *et al.*, 2013). Ajustar de manera simultánea el ahusamiento con el volumen total resulta en una estimación del volumen comercial de forma compatible, ya que los valores de los parámetros obtenidos integran la forma del árbol y el volumen correspondiente a diferentes secciones (Demaerschalk, 1972; Clutter, 1980).

Dada la importancia que tienen las proyecciones de distribución de productos en la planeación del manejo y la valoración económica, para bosques naturales o PFC; además

Introduction

Precise estimation of volumetric stocks and product distribution are essential for planning the application of silvicultural practices at the right intensities, and in a timely manner, and indispensable to obtain the greatest possible economic return from the investment made in the establishment, maintenance and utilization of commercial forest plantations (PFCs), or in the activities of natural forest use (Cancino, 1993; De la Fuente *et al.*, 1998, Zepeda and Acosta, 2000).

The correct use of forestry tools, precise for the management oriented to obtain the maximum yield of the products, allows the evaluation of the silvicultural activities, at any moment of its development (volume and income), and determines the optimum point of harvest (cutting cycle and turn) (Cancino, 1993; De la Fuente *et al.*, 1998; Zepeda and Acosta, 2000; Tamarit *et al.*, 2013).

In calculating the total volume or by type of product in each surface unit, prior to harvesting, it is necessary to have an accurate tree stand system and an equation that determines the cutting pattern, with the purpose of maximizing the volume or value of the products obtained in natural forests or PFCs (Cancino, 1993; De la Fuente *et al.*, 1998; Tamarit *et al.*, 2013). This system is a basic tool in forest inventories and in the planning of management activities (Corral-Rivas and Nívar-Cháidez, 2009).

From the taper functions it is feasible to describe the shape of the shaft, calculate the commercial height for any desired limit diameter, estimate the total volume, commercial volume and volume per individual log per tree; and generally, for a species or plantations. This allows calculations of volumetric stocks per unit area or stand (Clutter *et al.*, 1983; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

According to their mathematical complexity, these functions are classified by the number of variables used and the number of coefficients involved (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014), in trigonometric, exponential and segmented polynomial-based models (Tamarit *et al.*, 2013). Simultaneously adjusting the taper with the total volume results in an estimation of the commercial volume in a compatible way, since the values of the obtained parameters integrate the shape of the tree and the volume corresponding to different sections (Demaerschalk, 1972; Clutter, 1980).

From the importance of product distribution projections in management planning and economic valuation for natural forests or PFCs; in addition to the mathematical robustness of the taper and commercial volume models when adjusted simultaneously, they have been used to model in Mexico species such as *P. arizonica* Engelm., in *Chihuahua* (Pompa *et al.*, 2009); *P. pseudostrabus* Lindl., in *Nuevo León* (Tapia and Nívar, 2011); *P. patula* Schiede ex Schltdl. & Cham., in *Hidalgo*

de la solidez matemática de los modelos de ahusamiento y volumen comercial al ajustarlos de forma simultánea, se han utilizado para modelar en México especies como *P. arizonica* Engelm., en Chihuahua (Pompa *et al.*, 2009); *P. pseudostrobus* Lindl., en Nuevo León (Tapia y Nívar, 2011); *P. patula* Schiede ex Schltdl. & Cham., en Hidalgo (Hernández *et al.*, 2013; Uranga-Valencia *et al.*, 2015); y *P. arizonica*, *P. ayacahuite* Ehrenb. ex Schltdl., *P. durangensis* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham., *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham. (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014), *P. oocarpa* Schiede ex Schltdl. y *P. douglasiana* Martínez (López *et al.*, 2015), en Durango.

El objetivo del presente estudio fue generar un sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial (d-Vc) para árboles individuales de *Pinus greggii* Engelm. en plantaciones forestales de Metztitlán, Hidalgo, México. El sistema compatible está integrado por un modelo de ahusamiento, uno de volumen total (V_t) y otro de volumen comercial (V_c).

Materiales y Métodos

Las plantaciones forestales de *P. greggii* están ubicadas en el ejido Fontezuelas, municipio Metztitlán, Hidalgo, entre los 20°29' de latitud N y 98°54' de longitud O, a una altitud que varía entre 2 000 y 2 500 m. Se localizan dentro de la provincia del Eje Neo-volcánico Transversal y la subprovincia del Carso Huasteco (Inegi, 1985); con suelos de las unidades Feozem háplico y Regosol eútrico (Inegi, 1992). El clima es templado semi-seco (García, 1988); la región hidrológica corresponde a la RH26 Río Pánuco, sub cuenca río Moctezuma y microcuenca Hermosillo-Fontezuelas (Inegi, 1985).

Se obtuvo información del análisis troncal de 24 árboles de *P. greggii* distribuidos estratégicamente para cubrir toda la variabilidad de formas y tamaños resultado del crecimiento de estos árboles, como lo indican Torres y Magaña (2001), con el fin de mejorar el intervalo de aplicación de las ecuaciones generadas.

La toma de datos se efectuó mediante un muestreo destructivo, semejante a lo realizado por Tamarit *et al.* (2013) y Hernández *et al.* (2013). Consistió en el derribo y troceo del arbolado; las mediciones fueron diámetro normal (D_n), diámetro con corteza (d) y alturas (H_m) a distancias de 1, 1.5, 2 y 2.55 m de acuerdo con las condiciones de forma del árbol y los productos comerciales que pudieran resultar; se inició a la altura del tocón (H_t) hasta la altura total (H). En el caso de la cubicación de trozas individuales se utilizó la fórmula de Newton y la del cono para la punta, mientras que el volumen total por individuo se estimó con el método de trozas traslapadas propuesto por Bailey (1995).

Se auditó, corrigió y depuró la base de datos, mediante gráficas de las variables de ahusamiento y volumen acumulado, se observó el comportamiento de la información y la tendencia

(Hernández *et al.*, 2013; Uranga-Valencia *et al.*, 2015); and *P. arizonica*, *P. ayacahuite* Ehrenb. ex Schltdl., *P. durangensis* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham., *P. teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham. (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014), *P. oocarpa* Schiede ex Schltdl. and *P. douglasiana* Martínez (López *et al.*, 2015), in Durango.

The objective was to generate a compatible commercial taper-volume (d-Vc) system for individual trees of *Pinus greggii* Engelm. in forest plantations of Metztitlán, Hidalgo State, Mexico. The compatible system consists of a taper model, one of total volume (V_t) and one of commercial volume (V_c).

Materials and Methods

Pinus greggii forest plantations are located in Fontezuelas ejido, Hidalgo State, between 20°29' N and 98°54' W at 2 000 to 2 500 masl. They are found inside the Transverse Neo-Volcanic Axis and the Carso Huasteco subprovince (Inegi, 1985); with Haplic phaeozem and Eutric regosol units (Inegi, 1992). Climate is semi-dry temperate (García, 1988); the hydrologic region belongs to RH26 Panuco River, Moctezuma river sub-basin and Hermosillo-Fontezuelas microbasin (Inegi, 1985).

Data were obtained from the trunk analysis of 24 *P. greggii* trees strategically distributed to cover all the variability of shapes and sizes resulting from their growth, as Torres and Magaña (2001) indicate, in order to improve the application interval of the equations generated.

Data collection was carried out by destructive sampling, similar to that carried out by Tamarit *et al.* (2013) and Hernández *et al.* (2013). It consisted in the felling and cutting of trees; the measurements were normal diameter (D_n), diameter with bark (d) and heights (H_m) at distances of 1, 1.5, 2 and 2.55 m according to the tree shape conditions and commercial products that may result; the height of the stump (H_t) was started up to the total height (H). In the case of individual logs, the Newton formula and cone tip were used, while the total volume per individual was estimated using the overlapping log method proposed by Bailey (1995).



lógica, tal como lo realizaron Pompa *et al.* (2009), Tamarit *et al.* (2013) y Hernández *et al.* (2013). Se analizaron tres sistemas compatibles de ahusamiento-volumen comercial seleccionados de la literatura (Fang y Bailey, 1999; Lenhart y Clutter, 1971), los cuales se probaron y evaluaron para describir el perfil fustal en árboles de *P. greggii*; y se muestran a continuación:

1) Fang y Bailey (1999) caso 1-a

$$d = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0} Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \frac{k}{\beta_0 h} \frac{(k \beta_0)}{\beta_0}} \text{ y } Vc = \alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \beta_0 d^2 h$$

2) General de Fang y Bailey (1999)

$$d = \frac{(\beta_1 - 2)k}{(\beta_1 - 2\beta_2)\beta_0} \left[h^{1-2\beta_2/\beta_1} H^{1-2\beta_2/\beta_1} \right] \cdot \left(\alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} / \beta_0 \right)^{1/2\beta_1} \beta_1^{1/2} x h^{\beta_2/\beta_1} \text{ y}$$

$$Vc = \alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \beta_0 d^{\beta_1} / h^{\beta_2}$$

3) Lenhart y Clutter (1971)

$$d = Dn^x \frac{h}{H} \frac{1}{1.3} \beta_1^{1/2} \text{ y } Vc = \alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \beta_0^x \frac{d^{\beta_1}}{Dn^{\beta_1/2}} (H/1.3)$$

Estos sistemas compatibles de ahusamiento-volumen comercial cumplen con la condición de que $h = H$ cuando $d = 0$ y pueden ser utilizados para la predicción del diámetro a cualquier altura en el árbol; donde $h = H - Hm$ y $k = \pi/40000$, cuando el diámetro está en metros.

El ajuste se realizó como lo indican Fang y Bailey (1999) y Fang *et al.* (2000), con el modelo de volumen total de Schumacher-Hall para mejorar la estimación de los parámetros, obtener de manera más rápida la convergencia del sistema y hacer más precisa la significancia de los estimadores. Para evitar problemas de convergencia en el ajuste estadístico en la estimación de los parámetros, se empleó un valor numérico de $\delta = 0.001$, que junto con una variable indicadora en la punta del árbol para $h = H$, cuando $d = 0$ evitaron que el modelo ajustara en cero y se perdiera un dato; por consiguiente, la capacidad de ajuste cerca de la altura total o diámetro cero.

Los sistemas compatibles se ajustaron por medio del procedimiento MODEL y el método de máxima verosimilitud (FIML) en el paquete estadístico SAS/ETS® (SAS, 2008); procedimiento que permite la estimación de los parámetros de manera simultánea, y se muestra normalidad de la frecuencia de los residuos, minimiza la varianza y asume una media igual a cero (Gujarati, 2004), a partir de una distribución normal e independencia en los errores (Bruce *et al.*, 2003).

La evaluación y selección del mejor sistema compatible se llevó a cabo con los estadísticos de bondad de ajuste comúnmente utilizados, como el coeficiente de determinación ajustado (R^2_{aj})

The database was audited, corrected and refined using graphs of the taper variables and accumulated volume. The behavior of the information and the logical tendency were observed, as was done by Pompa *et al.* (2009), Tamarit *et al.* (2013) and Hernández *et al.* (2013). Three compatible commercial taper-volume systems selected from the literature (Fang and Bailey, 1999; Lenhart and Clutter, 1971) were tested and evaluated to describe the stem profile in *P. greggii* trees; and are shown below:

1) Fang and Bailey (1999) case 1-a

$$d = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0} Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \frac{k}{\beta_0 h} \frac{(k \beta_0)}{\beta_0}} \text{ and } Vc = \alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \beta_0 d^2 h$$

2) Fang and Bailey's general (1999)

$$d = \frac{(\beta_1 - 2)k}{(\beta_1 - 2\beta_2)\beta_0} \left[h^{1-2\beta_2/\beta_1} H^{1-2\beta_2/\beta_1} \right] \cdot \left(\alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} / \beta_0 \right)^{1/2\beta_1} \beta_1^{1/2} x h^{\beta_2/\beta_1} \text{ and}$$

$$Vc = \alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \beta_0 d^{\beta_1} / h^{\beta_2}$$

3) Lenhart and Clutter (1971)

$$d = Dn^x \frac{h}{H} \frac{1}{1.3} \beta_1^{1/2} \text{ y } Vc = \alpha_0 Dn^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \beta_0^x \frac{d^{\beta_1}}{Dn^{\beta_1/2}} (H/1.3)$$

These compatible systems of taper-commercial volume satisfy the condition of $h = H$ when $d = 0$ and may be used for prediction diameter at any tree height; where $h = H - Hm$ and $k = \pi/40000$ when the diameter is in meters.

Fit was made as recommended by Fang and Bailey (1999) and Fang *et al.* (2000), with Schumacher-Hall's volume model of total n to improve the estimation of the parameters, to obtain in a faster way the convergence of the system and to the convergence of the system and to make more accurate the significance of the estimators. To avoid the convergence problems in the statistical fit in the estimation of the parameters, a numerical value of $\delta = 0.001$ was used, which, along with an indicator variable in the tip of the tree for $h = H$ when $d = 0$ avoided that the model fitted to zero and a data was lost; therefore, the ability of fit near the total height or zero diameter.

Compatible systems were fitted using the MODEL procedure and the maximum likelihood method (FIML) in the SAS / ETS® statistical package (SAS, 2008); A procedure that allows the estimation of the parameters simultaneously, and shows the normality of the frequency of the residues, minimizes the variance and assumes a mean equal to zero (Gujarati, 2004), based on a normal distribution and independence in errors (Bruce *et al.*, 2003).



y la raíz del cuadrado medio del error (RCME) (Prodan *et al.*, 1997; Corral-Rivas *et al.*, 2007).

Una vez seleccionado el mejor modelo, se verificó de forma gráfica la homocedasticidad de los residuos. Los problemas de heterocedasticidad se corrigieron con una función que pondera la varianza de los residuales (Crecente *et al.*, 2009), por medio de una función exponencial basada en la variable combinada ($\text{Residual}/((Dn^2H)^\phi)^{0.5}$) de acuerdo a la metodología sugerida por Harvey (1976), en la que el valor del parámetro ϕ proviene de la regresión línea del logaritmo natural de los residuales en función de la variable combinada (Dn^2H).

La autocorrelación de los errores se midió con la prueba de Durbin-Watson (DW), tal como lo sugieren Augusto *et al.* (2009); Pompa-García *et al.*, (2009) y Hernández *et al.* (2013); y para corregir el problema de autocorrelación en los modelos que lo requirieran, se incluyó un modelo de tipo autorregresivo en tiempo continuo CAR(X) (Zimmerman y Nuñez-Antón, 2001), aplicando retardos (pxr), tanto en ahusamiento como en volumen comercial, con la finalidad de obtener valores del estadístico Durbin-Watson (DW) cercano a 2 (Barrio *et al.*, 2014), en alguna de las dos variables. Además, se graficaron los datos observados contra los predichos de ahusamiento y volumen comercial para verificar el sesgo porcentual de la muestra, con respecto a las estimaciones.

Resultados y Discusión

Los parámetros en todos los sistemas compatibles resultaron altamente significativos con un nivel de confiabilidad mayor a 95 % y errores estándar aproximados (Eea) bajos, situación semejante a lo obtenido por Hernández *et al.* (2013) al utilizar los mismos sistemas para *P. patula* en Zacualtipán, Hidalgo (Cuadro 1).

The evaluation and selection of the best compatible system was carried out with commonly used goodness of fit statisticals, such as the adjusted determination coefficient (R_{aj}^2) and the root mean square error (RCME) (Prodan *et al.*, 1997; Corral-Rivas *et al.*, 2007).

Once the best model has been selected, the homoscedasticity of the residues was graphically verified. The problems of heteroscedasticity were corrected with a function that weights the variance of the residuals (Crecente *et al.*, 2009), by means of an exponential function based on the combined variable ($\text{Residual}/((Dn^2H)^\phi)^{0.5}$) (according to the methodology suggested by Harvey (1976), in which the value of the parameter ϕ comes from the regression line of the natural logarithm of the residuals as a function of the combined variable (Dn^2H).

Autocorrelation of the errors was measured with the Durbin-Watson (DW) test, as suggested by Augusto *et al.* (2009); Pompa-García *et al.* (2009) and Hernández *et al.* (2013); and to correct the problem of autocorrelation in the models that required it, a self-regressive model was included in continuous time CAR (X) (Zimmerman and Nuñez-Antón, 2001), applying delays (pxr) in both taper and volume with the purpose of obtaining values of the Durbin-Watson (DW) statistic near 2 (Barrio *et al.*, 2014), in one of the two variables. In addition, the observed data against the predicted taper and commercial volume were plotted to verify the percentage bias of the sample, with respect to the estimates.

Results and Discussion

The parameters in all compatible systems were highly significant with a reliability level greater than 95 % and approximate standard error (Eea) errors. Situation similar to that obtained by Hernández *et al.* (2013) when using the same systems for *P. patula* in Zacualtipán, Hidalgo (Table 1).

Cuadro 1. Valores de los parámetros en los sistemas compatibles de ahusamiento-volumen comercial utilizados para *Pinus greggii* Engelm. en Metztlán, Hidalgo.

Sistema compatible	Parámetros	Estimación	Eea	Valor t	Probabilidad
Fang y Bailey (1999) caso 1-a	α_0	0.000063	7.72E-06	8.15	<0.0001
	α_1	2.164108	0.0376	57.58	<0.0001
	α_2	0.592768	0.0282	21.01	<0.0001
	β_0	0.000032	2.73E-07	116.05	<0.0001
General de Fang y Bailey (1999)	α_0	0.000062	8.15E-06	7.58	<0.0001
	α_1	2.093518	0.0405	51.71	<0.0001
	α_2	0.682246	0.0318	21.45	<0.0001
	β_1	0.000035	3.33E-06	10.64	<0.0001
	β_2	1.830918	0.0498	36.73	<0.0001
	β_3	1.168991	0.0428	27.33	<0.0001

Continúa Cuadro 1...

Continúa Cuadro 1...

Sistema compatible	Parámetros	Estimación	Eea	Valor t	Probabilidad
Lenhart y Clutter (1971)	α_0	0.000057	7.28E-06	7.85	<0.0001
	α_1	2.150602	0.0369	58.24	<0.0001
	α_2	0.642694	0.0279	23.03	<0.0001
	β_0	0.000031	5.36E-07	58.57	<0.0001
	β_1	3.304601	0.0153	216.33	<0.0001

Table 1. Values of the parameters in the commercial taper-volume compatible systems used for *Pinus greggii* Engelm. in *Metztlán, Hidalgo*.

Compatible system	Parameters	Estimation	Eea	t value	Probability
Fang and Bailey (1999) case 1-a	α_0	0.000063	7.72E-06	8.15	<0.0001
	α_1	2.164108	0.0376	57.58	<0.0001
	α_2	0.592768	0.0282	21.01	<0.0001
	β_0	0.000032	2.73E-07	116.05	<0.0001
Fang and Bailey's general (1999)	α_0	0.000062	8.15E-06	7.58	<0.0001
	α_1	2.093518	0.0405	51.71	<0.0001
	α_2	0.682246	0.0318	21.45	<0.0001
	β_1	0.000035	3.33E-06	10.64	<0.0001
	β_2	1.830918	0.0498	36.73	<0.0001
	β_3	1.168991	0.0428	27.33	<0.0001
Lenhart and Clutter (1971)	α_0	0.000057	7.28E-06	7.85	<0.0001
	α_1	2.150602	0.0369	58.24	<0.0001
	α_2	0.642694	0.0279	23.03	<0.0001
	β_0	0.000031	5.36E-07	58.57	<0.0001
	β_1	3.304601	0.0153	216.33	<0.0001

El modelo explícito de volumen total de Schumacher-Hall en los tres sistemas compatibles tuvo valores en los parámetros muy semejantes, solo con diferencias atribuibles al ajuste simultáneo de los modelos. Al comparar el volumen total calculado para la muestra y la estimación del volumen total, mediante los parámetros α_0 , α_1 y α_2 de la ecuación de Schumacher-Hall, se tiene que el sistema general de Fang y Bailey (1999) arroja valores más precisos, ya que sustituyó solo 0.02 % del volumen total, en el total de la muestra, mientras que, el sistema de Lenhart y Clutter (1971) en 0.87 % y el de Fang y Bailey (1999) caso 1-a, lo sobreestima en 0.16 %. En los tres sistemas compatibles, el sesgo promedio en la estimación del volumen total respecto al volumen real es menor de 0.0022 m³ por individuo.

Con base en los criterios de bondad de ajuste se aprecia que el modelo general de Fang y Bailey (1999), estadísticamente, es más estable para los datos utilizados, tanto en la descripción del fuste como en el volumen comercial y total (Cuadro 2). Este modelo explica de mejor manera la variabilidad total de ambas variables, debido a que los coeficientes de determinación

The explicit model of Schumacher-Hall's total volume in the three compatible systems had very similar values in the parameters, only with differences attributable to the simultaneous fit of the models. When comparing the total calculated volume for the sample and the estimation of the total volume through the α_0 , α_1 and α_2 parameters of the Schumacher-Hall equation, Fang and Bailey's (1999) general system brings more accurate values, since it substituted only 0.02 % of the total volume, in the total of the sample, while Lenhart and Clutter's system (1971) did in 0.87 % and that of Fang and Bailey (1999) case 1-a overestimates it in 0.16 %. In the three compatible system, the average bias in the estimation of the total volume in regard to the real volume is under 0.0022 m³ per individual.

Based upon the criteria of goodness of fit it can be observed that the general model of Fang and Bailey (1999) is statistically more stable for the used data, in description of the stem as in the total and commercial value (Table 2). This model explains in a better way the total variability of both variables, since the fitted coefficients of determination, in both cases, are higher

ajustados, en los dos casos, son mayores que los otros sistemas, además de presentar los menores valores en la *SCE* y la *RCME*. Dichos valores son similares a los registrados por Pompa *et al.* (2009) al ajustar sistemas compatibles para *P. arizonica* en el suroeste de Chihuahua.

than the other systems, as well as they show the lowest values of *SCE* and *RCME*. Those values are similar to those of Pompa *et al.* (2009) when fitting the compatible systems to *P. arizonica* in southwest Chihuahua.

Cuadro 2. Estadísticos de bondad de ajuste de los tres sistemas de ahusamiento-volumen comercial utilizados para *Pinus greggii* Engelm. en Metztlán, Hidalgo.

Modelo	Variable	<i>SCE</i>	<i>RCME</i>	R^2_{aj}	<i>DW</i>
Fang y Bailey (1999) caso 1-a	<i>V_c</i>	0.1215	0.025	0.9547	0.4019
	<i>d</i>	458	1.5326	0.9583	0.5883
General de Fang y Bailey (1999)	<i>V_c</i>	0.1175	0.0247	0.9558	0.431
	<i>d</i>	436.4	1.5037	0.9601	0.6045
Lenhart y Clutter (1971)	<i>V_c</i>	0.1759	0.0301	0.9345	0.461
	<i>d</i>	462.7	1.5268	0.9583	0.565

SCE = Suma de cuadrados del error; *RCME* = Raíz cuadrada media del error; R^2_{aj} = Coeficiente de determinación ajustado; *DW* = Valor de la prueba de Durbin-Watson.

Table 2. Statistics of the goodness of fit of the three taper-commercial volume systems used for *Pinus greggii* Engelm. in Metztlán, Hidalgo State.

Model	Variable	<i>SCE</i>	<i>RCME</i>	R^2_{aj}	<i>DW</i>
Fang and Bailey (1999) case 1-a	<i>V_c</i>	0.1215	0.025	0.9547	0.4019
	<i>d</i>	458	1.5326	0.9583	0.5883
Fang and Bailey's general (1999)	<i>V_c</i>	0.1175	0.0247	0.9558	0.431
	<i>d</i>	436.4	1.5037	0.9601	0.6045
Lenhart and Clutter (1971)	<i>V_c</i>	0.1759	0.0301	0.9345	0.461
	<i>d</i>	462.7	1.5268	0.9583	0.565

SCE = Sum of error squares; *RCME* = Root mean square error; R^2_{aj} = adjusted determination coefficient; *DW* = Durbin-Watson test value

Al verificar los supuestos de regresión del modelo general de Fang y Bailey (1999), que resultó ser estadísticamente el mejor, el valor de la prueba de Shapiro-Wilk (*SW*) indica normalidad de la frecuencia de los residuos ($SW > 0.93$); sin embargo, los residuales de volumen comercial se distribuyeron de forma heterocedástica y el valor de la prueba de Durbin-Watson (*DW*) de autocorrelación fue de 0.43 para el ahusamiento y de 0.60 para el volumen comercial; en ambos casos menor a 1.5, lo cual es una violación de estos supuestos de regresión.

Una vez corregidos los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación, se ajustó, nuevamente, el modelo general de Fang y Bailey (1999), con ello se obtuvo una mejora estadística

When checking the regression assumptions of the Fang and Bailey's (1999) general model which proved to be statistically the best, the value of the Shapiro-Wilk (*SW*) test indicates normality of the residue frequency ($SW > 0.93$); however, commercial volume residuals were distributed heteroscedastically and the value of the Durbin-Watson (*DW*) autocorrelation test was 0.43 for the taper and 0.60 for the commercial volume; in both cases less than 1.5, which is a violation of these regression assumptions.

Once the problems of heteroscedasticity and autocorrelation were corrected, the general model of Fang and Bailey (1999) was again adjusted, thus a considerable statistical improvement was obtained (Table 3). The value of the Shapiro-Wilk normality

considerable (Cuadro 3). El valor de La prueba de normalidad de Shapiro-Wilk fue de 0.98 ($\alpha < 0.0001$) y los residuales se comportaron de manera homocedástica, mientras que la prueba de DW para detectar la autocorrelación fue de 1.95 para ahusamiento y 1.16 para el volumen comercial.

test was 0.98 ($\alpha < 0.0001$) and the residuals behaved homoscedastically, while, the DW test to detect autocorrelation was 1.95 for taper and 1.16 for commercial volume.



Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste y valores de los parámetros del sistema compatible general de Fang y Bailey (1999) para *Pinus greggii* Engelm. en Metztlán, Hidalgo.

Modelo	Variable	SCE	RCME	R^2_{aj}	Parámetro	Estimación	Eea	Valor t	Probabilidad
General de Fang y Bailey (1999)	Vc	0.0445	0.0152	0.9832	α_0	0.0001	0.000018	5.56	<0.0001
					α_1	1.99139	0.0515	38.65	<0.0001
					α_2	0.621639	0.0432	14.4	<0.0001
	d	384.3	1.4148	0.9646	β_0	0.000049	7.52E-06	6.49	<0.0001
					β_1	1.838005	0.0549	33.49	<0.0001
					β_2	0.987617	0.0457	21.59	<0.0001
					p1r	0.849034	0.0334	25.44	<0.0001
					p2r	0.747405	0.0298	25.06	<0.0001

SCE = Suma de cuadrados del error; RCME = Raíz cuadrada media del error; R^2_{aj} = Coeficiente de determinación ajustado; p1r y p2r = Parámetros correspondientes al modelo autoregresivo de tiempo continuo (CAR(2)) aplicado para corregir la autocorrelación del sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial.

Table 3. Statistics of the goodness of fit and values of the parameters of Fang and Bailey's (1999) general compatible system for *Pinus greggii* Engelm. in Metztlán, Hidalgo State.

Model	Variable	SCE	RCME	R^2_{aj}	Parameter	Estimation	Eea	t value	Probability
Fang and Bailey's general (1999)	Vc	0.0445	0.0152	0.9832	α_0	0.0001	0.000018	5.56	<0.0001
					α_1	1.99139	0.0515	38.65	<0.0001
					α_2	0.621639	0.0432	14.4	<0.0001
	d	384.3	1.4148	0.9646	β_0	0.000049	7.52E-06	6.49	<0.0001
					β_1	1.838005	0.0549	33.49	<0.0001
					β_2	0.987617	0.0457	21.59	<0.0001
					p1r	0.849034	0.0334	25.44	<0.0001
					p2r	0.747405	0.0298	25.06	<0.0001

SCE = Sum of error squares; RCME = Root mean square error; R^2_{aj} = adjusted determination coefficient; p1r and p2r = Corresponding parameters corresponding to the autoregressive model of continuous time (CAR(2)) applied to correct the autocorrelation of the taper-commercial volume compatible system.

Al graficar las estimaciones realizadas con el sistema compatible, se presenta una tendencia apropiada de los datos de ahusamiento y de volumen comercial (Figura 1 a y b), semejante a lo registrado por Rodríguez y Broto (2003) al analizar diversos modelos de perfil del fuste y hacer estudios de cilindricidad de los árboles de *Populus x euroamericana* (Dode) Guinier en Navarra, España; así como, a lo citado por Fassola *et al.*, (2007) al ajustar funciones de perfil de exponente variable y posterior ajuste de modelos de volumen compatibles para *Eucalyptus grandis* W. Hill. ex Maiden en Mesopotamia, Argentina; y por Lara (2011), quien aplicó funciones de ahusamiento para, posteriormente, derivar el modelo de volumen comercial compatible para *Tectona grandis* L. en la zona costera de Ecuador.

When plotting the estimates made with the compatible system, an appropriate trend of taper and commercial volume data (Figure 1 a and b), similar to that reported by Rodríguez and Broto (2003), is presented when analyzing various models of the shaft profile and to do cylindrical studies of the trees of *Populus x euroamericana* (Dode) Guinier in Navarra, Spain; as well as to that cited by Fassola *et al.*, (2007) when adjusting variable exponent profile functions and subsequent adjustment of compatible volume models for *Eucalyptus grandis* W. Hill. ex Maiden in Mesopotamia, Argentina; and by Lara (2011), who applied taper functions to later derive the compatible commercial volume model for *Tectona grandis* L. in the coastal zone of Ecuador.

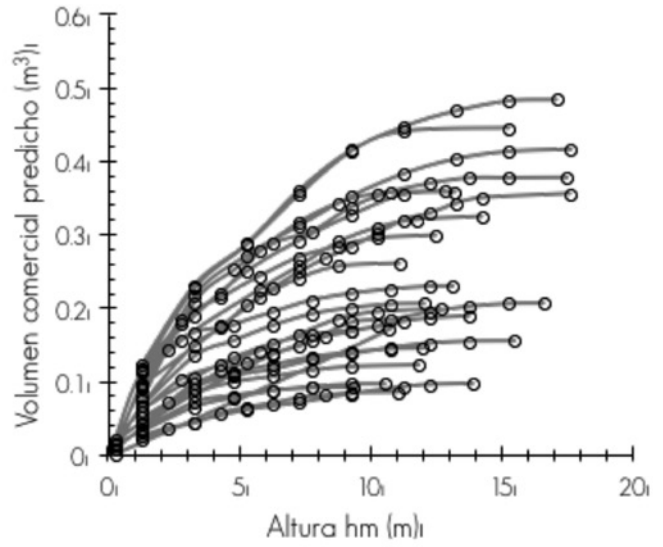
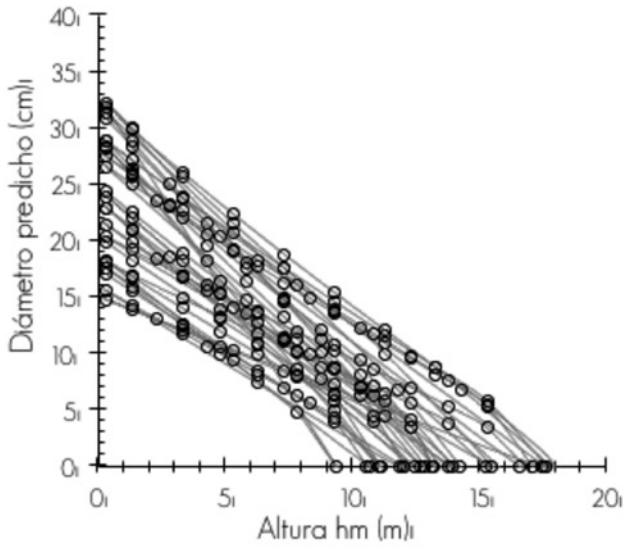


Figura 1. Diámetro estimado (a) y volumen comercial acumulado con respecto a la altura sobre el fuste (b) para *Pinus greggii* Engelm. en Metztitlán, Hidalgo.

Figure 1. Estimated diameter and accumulated commercial volume in regard to height over stem (b) for *Pinus greggii* Engelm. in Metztitlán, Hidalgo State.

Los valores predichos con el sistema compatible general de Fang y Bailey (1999), con respecto a los datos observados presentan una tendencia lineal recta del ahusamiento (Fassola *et al.*, 2007; Lara, 2011) y el volumen comercial (Tamarit *et al.*, 2013) (Figura 1a y b), la cual es deseable en este tipo de estudios (Figura 2a y 2b).

The predicted values with Fang and Bailey's (1999) general in regard to the observed date show a taper straight line trend (Fassola *et al.*, 2007; Lara, 2011) and the commercial value (Tamarit *et al.*, 2013) (Figure 1a and b), which is desirable in this kind of studies (Figure 2a and 2b).

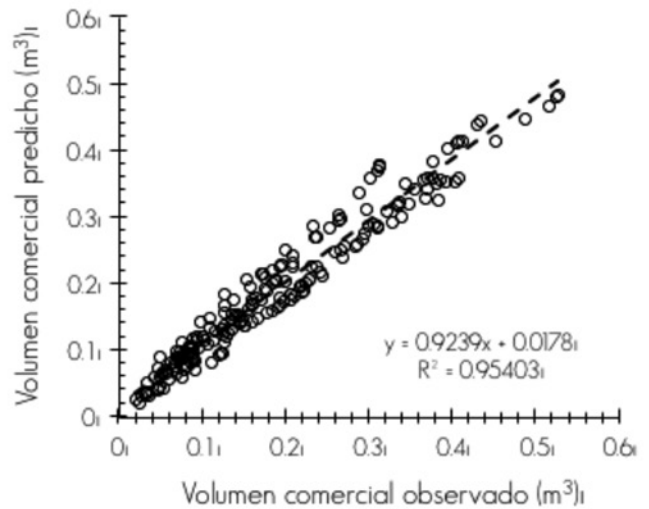
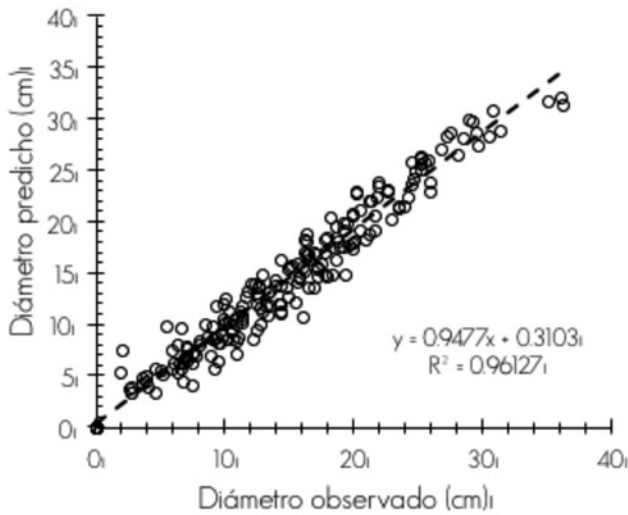


Figura 2. Comparación del diámetro y volumen observado contra los predichos de diámetro (a) y volumen comercial (b) del sistema compatible general de Fang y Bailey (1999) para *Pinus greggii* Engelm. en Metztitlán, Hidalgo.

Figure 2. Comparison of the observed diameter and volume against the predicted of diameter (a) and commercial volume (b) of Fang and Bailey's general (1999) compatible system for *Pinus greggii* Engelm. in Metztitlán, Hidalgo State.



El coeficiente de determinación entre los valores predichos y observados indica que la descripción del perfil de los árboles por el sistema tiene una diferencia agregada en por ciento para toda la muestra de 3.8 en ahusamiento y de 4.6 para volumen comercial; con un promedio en el sesgo por estimación de 0.017 y 0.020, respectivamente para cada variable (Figura 2a y 2b). Los sesgos son inferiores a los citados para el ahusamiento por Nívar y Domínguez (1997) al emplear cuatro modelos de perfil fustal para *Pinus brutia* Ten., *P. halepensis* Mill., *P. eldarica* Medw. y *P. estevezii* (Martínez) F. P. Perry; Corral *et al.* (1999) al utilizar cinco modelos de perfil para *P. cooperi* C. E. Blanco, *P. durangensis*, *P. engelmannii* Carr., *P. leiophylla* y *P. herrerae* Martínez; Tapia y Nívar (2011) en *P. pseudostrobus* con cinco modelos de ahusamiento.

El sesgo para el volumen comercial es semejante al documentado por Quiñonez *et al.* (2014) con sistemas compatibles de d-Vc para *P. arizonica*, *P. ayacahuite*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* y *P. teocote*.

En el sistema compatible seleccionado, se observó que la predicción del diámetro a diferentes alturas tiende a presentar problemas en alturas menores o iguales a 0.3 m (altura de tocón), y a subestimar ligeramente los diámetros por debajo del primer tercio del árbol. Situación semejante a la observada en Ecuador por Lara (2011) y en México por Tamarit *et al.* (2013) para *Tectona grandis*. Al considerar que las partes bajas del arbolado pueden ser medidas de manera directa con mayor precisión, lo ideal es contar con herramientas que realicen estas estimaciones precisas en las partes altas, para conocer la distribución de productos, el diámetro mínimo y el volumen resultante (Rodríguez and Broto, 2003; Tamarit *et al.*, 2013).

Con los resultados del presente estudio se pueden realizar descripciones del perfil del árbol, así como estimaciones precisas del volumen total y volumen comercial en plantaciones de *P. greggii*, para la proyección de la distribución de productos maderables destinados a un mercado diferenciado.

Conclusiones

El sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial de Fang y Bailey (1999), es el que mejores estimaciones genera para describir el perfil de los árboles de *P. greggii* en las PFC evaluadas y se puede usar de manera confiable para predecir el diámetro a cualquier altura y su respectivo volumen, además es compatible con la ecuación de volumen total.

La información obtenida es una herramienta valiosa para los análisis de datos provenientes de inventarios forestales, particularmente, en la predicción de la distribución de productos por árbol o unidad de superficie de las plantaciones, y la valoración económica dentro de un

The coefficient of determination between the predicted and observed values indicates that the description of the profile of the trees by the system has an aggregate difference in percent for the whole sample of 3.8 in taper and of 4.6 for commercial volume; with an average in bias by estimation of 0.017 and 0.020, respectively for each variable (Figure 2a and 2b). The biases are lower than those cited for the tapering by Nívar and Domínguez (1997) when using four models of stem profile for *Pinus brutia* Ten., *P. halepensis* Mill., *P. eldarica* Medw. and *P. estevezii* (Martínez) F. P. Perry; Corral *et al.* (1999) when using five profile models for *P. cooperi* C. E. Blanco, *P. durangensis*, *P. engelmannii* Carr., *P. leiophylla* and *P. herrerae* Martínez; Tapia and Nívar (2011) in *P. pseudostrobus* with five taper models.

The bias for commercial volume is similar to that documented by Quiñonez *et al.* (2014) with compatible d-Vc systems for *P. arizonica*, *P. ayacahuite*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* and *P. teocote*.

In the selected compatible system, it was observed that the prediction of the diameter at different heights tends to present problems at heights less than or equal to 0.3 m (stump height), and to slightly underestimate the diameters below the first third of the tree, similar situation to that observed in Ecuador by Lara (2011) and in Mexico by Tamarit *et al.* (2013) in *Tectona grandis*. Considering that the lower parts of the tree can be measured directly more accurately, it is ideal to have tools that make these precise estimates in the upper parts to know the product distribution, the minimum diameter and the resulting volume (Rodríguez and Broto, 2003; Tamarit *et al.*, 2013).

With the results of the present study, obtained in the study can be made descriptions of the tree profile, as well as accurate estimates of the total volume and commercial volume in plantations of *P. greggii*, for the projection of the distribution of timber products destined to a differentiated market.


Conclusions

The Fang and Bailey (1999) compatible taper and volume system is the best estimate to describe the profile of *Pinus greggii* trees in the evaluated PFCs and can be used reliably to predict the diameter at any height and its respective volume; it is also compatible with the equation of total volume.

The information obtained is a valuable tool for the analysis of data from forest inventories, particularly in the prediction of the distribution of products per tree or unit area of plantations, and the economic valuation within a differentiated market of timber products of forest use.

Because the silvicultural activities applied in PFCs affect the shape of the tree and, consequently, the distribution of products, the constant updating of this information is fundamental in the planning of sustainable forest management for *P. greggii*. 🌿

mercado diferenciado de los productos maderables del aprovechamiento forestal.

Debido a que las actividades silvícolas aplicadas en las PFC afectan la forma del árbol y, por consiguiente, la distribución de productos, la constante actualización de esta información es fundamental en la planeación del manejo forestal sostenible para *P. greggii*. 

Conflicto de intereses

Los doctores declaran no tener conflicto de intereses.

Contribución por autor

Jonathan Hernández-Ramos: análisis de datos y redacción del documento; Adrián Hernández-Ramos: gestión de los datos de campo y redacción del escrito; José de Jesús García-Magaña: coordinación de toma de datos de campo, análisis de datos, redacción y revisión del manuscrito; Xavier García-Cuevas: diseño y ejecución del análisis estadístico, redacción y revisión del documento; Guadalupe Geraldine García-Espinoza: captura y gestión de la información de campo y revisión del escrito; Hipólito Jesús Muñoz-Flores: redacción y revisión del documento; Edgar Hugo Olvera-Delgadillo: toma de datos de campo, captura y gestión de la información de campo.

Referencias

- Augusto, C. T., J. O. Vargas M. y M. Escalier H. 2009. Ajuste y selección de modelos de regresión para estimar el volumen total de árboles. Escuela de Ciencia Forestales de la Universidad Mayor de San Simón. Cochabamba, Bolivia. Documento Técnico Núm. 5. 27 p.
- Bailey, L. R. 1995. Upper stem volumes from stem analysis data: An overlapping bolts method. *Canadian Journal of Forest Research* 25(1): 170-173.
- Barrio, A., A. M. López y V. Nieto. 2014. Predicción de volúmenes comerciales de *Eucalyptus grandis* a través de modelos de volumen total y de razón. *Colombia Forestal* 17:137-149.
- Bruce, H. P., A. Tomer and Alexander V. E. 2003. Structural equation modeling: Applications in ecological and evolutionary biology. Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom. 393 p.
- Cancino C., J. O. 1993. Modelo optimizador de trozado de árboles basado en funciones de ahusamiento y programación dinámica. Tesis de Magister Scientiae. Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza. Turrialba, Costa Rica. 230 p.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *Forest Science* 26: 117-120.
- Clutter, J. L., C. Fortson J., V. Piennar L., H. Brister G. and L. Bailey R. 1983. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *Forest Science* 26(1):117-120.
- Corral-Rivas, J. J., M. Barrio-Anta, O. A. Aguirre-Calderón and U. Diéguez-Aranda. 2007. Use of stump diameter to estimate diameter at breast height and tree volume for major pine species in El Salto, Durango (México). *Forestry* 80(1): 29-40.
- Corral-Rivas, S. y J. J. Nívar-Cháidez. 2009. Comparación de técnicas de estimación de volumen fustal total para cinco especies de Durango, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 15(1): 5-13.
- Corral R., S., J. J. Nívar Ch. y F. Fernández S. 1999. Ajuste de funciones de ahusamiento a los perfiles fustales de cinco pináceas de la región de El Salto, Durango. *Madera y Bosques* 5(2): 53-65.
- Crecente C., F., A. Rojo A. and U. Diéguez A. 2009. A merchantable volume system for *Pinus sylvestris* L. in the major mountains ranges of Spain. *Annals of Forest Science* 66:1-12.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests.

Contribution by author

Jonathan Hernández-Ramos: data analysis and writing of the manuscript; Adrián Hernández-Ramos: handling of field data and writing of the manuscript; José de Jesús García-Magaña: coordination of field data collection, data analysis, writing and review of the document; Xavier García-Cuevas: design and practicing of statistical analysis, writing and review of the document; Guadalupe Geraldine García-Espinoza: collection and handling of field data and review of the manuscript; Hipólito Jesús Muñoz-Flores: writing and review of the document; Edgar Hugo Olvera-Delgadillo: field data collection, ordering and handling of field information.

End of the English version



- Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas, y J. R. Valdéz-Lazalde, 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango México. *Agrociencia* 42(4): 473-485.
- De la Fuente, E. A., A. Velázquez M., J. M. Torres R., H. Ramírez M., C. Rodríguez F. y A. Trinidad S. 1998. Predicción del crecimiento y rendimiento de *Pinus rudis* Endl. en Pueblos Mancomunados, Ixtlán, Oaxaca. *Revista Ciencia Forestal en México* 23(84): 3-8.
- Demaerschalk, J. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science* 18: 241-245.
- Fang, Z. and R. L. Bailey. 1999. Compatible volume and taper models with coefficients for tropical species on Hainan Island in Southern China. *Forest Science* 45(1): 85-100.
- Fang, Z., B. E. Borders and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science* 46(1):1-12.
- Fassola, H. E., Crechi E., Keller A. y Barth S. 2007. Funciones de forma de exponente variable para la estimación de diámetros a distintas alturas en *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden. cultivado en la Mesopotamia, Argentina. *RIA* 36(2): 109-128.
- García, E. 1988. Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen. Instituto de Geografía, Universidad Nacional Autónoma de México. D.F., México. 217 p.
- Gujarati, N. D. 2004. Violación de los supuestos del modelo clásico. *Econometría*. McGraw Hill Interamericana de México 4^{ta} Edición. México, D.F., México. pp. 327-538.
- Harvey, A. C. 1976. Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity. *Econometrica* 44(3): 461-465.
- Hernández P., D., H. M. De los Santos P., G. Ángeles P., J. R. Valdéz L. y V. H. Volke Haller. 2013. Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schtdl. et Cham. en Zacualtipán, Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 4(16): 33-45.
- Statistical Analysis System (SAS). 2008. SAS/STAT® 9.2 User's Guide Second Edition. SAS Institute Inc. Raleigh, NC, USA. n/p. <https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statugmcmc/63125/PDF/default/statugmcmc.pdf> (18 de diciembre, 2015).

- Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (Inegi). 1985. Cartas topográficas y edafológicas 1:250 000. Inegi. SPP. México, D.F. México. s/p.
- Instituto Nacional de Estadística Geográfica e Informática (Inegi). 1992. Síntesis geográfica del estado de Hidalgo. Vol. 13. Inegi. México, D. F., México. 134 p.
- Lara V. C., E. 2011. Aplicación de ecuaciones de conicidad para Teca (*Tectona grandis* L.f.) en la zona costera ecuatoriana. Ciencia y Tecnología 4(2):19-27.
- Lenhart, J. D. and J. L. Clutter. 1971. Cubic-foot yield tables for old-field loblolly pine plantations in the Georgia Piedmont. Forrest Research Council Report 22. Piedmont, GA, USA. 12 p.
- López M., J. C., F. Cruz C., J. A. Nájera L., y F. J. Hernández. 2015. Modelos de ahumamiento y volumen comercial para *Pinus oocarpa* y *Pinus douglasiana* en la región de Pueblo Nuevo, Durango. Investigación y Ciencia 23(64): 47-53.
- Návar, J. J. y P. A. Domínguez. 1997. Ajuste de modelos de volumen y funciones que describen el perfil diamétrico de cuatro especies de pino plantadas en el nordeste de México. Investigación Agraria Sistemas y Recursos Forestales 6 (1-2): 147-162.
- Pompa-García, M., C. Hernández, J. A. Prieto-Ruiz y R. Dávalos S. 2009. Modelación del volumen fustal de *Pinus durangensis* en Guachochi, Chihuahua, México. Madera y Bosques 15(1):61-73.
- Pompa G., M., J. J. Corral R., M. A. Díaz V. y M. Martínez S. 2009. Función de ahumamiento y volumen compatible para *Pinus arizonica* Engelm., en el Suroeste de Chihuahua. Revista Ciencia Forestal en México 34(105):119-136.
- Prodan, M., R. Peters, F. Cox and P. Real. 1997. Mensura forestal. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA), Costa Rica. San Isidro, San José, Costa Rica. 561 p.
- Rodríguez, P. y M. Broto. 2003. Ecuaciones de volumen comercial para las principales especies maderables de Castilla y León. Junta de Castilla y León. CESEFOR. Soria, España. 33 p.
- Quiñonez-Barraza, G., H. M. De los Santos-Posadas, J. G. Álvarez-González y A. Velázquez-Martínez. 2014. Sistema compatible de ahumamiento y volumen comercial para las principales especies de *Pinus* en Durango, México. Agrociencia 48(5):553-567.
- Tamarit U., J. C., H. M. De los Santos P., A. Aldrete, J. R. Valdéz L., H. Ramírez M. y V. Guerra C. 2013. Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* L. f. mediante funciones compatibles de ahumamiento-volumen. Revista Mexicana de Ciencias Forestales 5(21): 58-74.
- Tapia, J. y J. J. Návar. 2011. Ajuste de modelos de volumen y funciones de ahumamiento para *Pinus pseudostrabus* Lindl., en Bosques de pino de la Sierra Madre Oriental de Nuevo León, México. Foresta Veracruzana 13(2):19-28.
- Torres R, J. M. y O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Editorial Limusa. México, D. F., México. 472 p.
- Uranga-Valencia, L. P., H. M. De los Santos-Posadas, J. R. Valdéz-Lazalde, J. López-Upton y H. Navarro-Garza. 2015. Volumen total y ahumamiento para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. en tres condiciones de bosque. Agrociencia 49(7):787-801.
- Zepeda B., E. M. y M. Acosta M. 2000. Incremento y rendimiento maderable de *Pinus montezumae* Lamb., en San Juan Tetla, Puebla. Madera y Bosques 6(1): 15-27.
- Zimmerman, D. L. and V. Nuñez-Antón. 2001. Parametric modelling of growth curve data: An overview (with discussion). Test 10(1):1-73.

