



Artículo / Article

Sistema de cubicación para árboles individuales de *Quercus* sp. en bosques bajo manejo de Puebla, México

Cubing system for individual *Quercus* spp. trees in forests under management in *Puebla*, Mexico

Juan Carlos Tamarit Urias^{1*}, Elba Rojas Díaz², Gerónimo Quiñonez Barraza³,
Casimiro Ordoñez Prado¹ y José Carlos Monárrez González³

Resumen

Se procesaron datos de ahusamiento de 124 ejemplares del género *Quercus*. La muestra se obtuvo mediante método destructivo (derribo, desrame y seccionado) en bosques bajo manejo del estado de Puebla, México. Se colectaron 1 709 pares de datos diámetro-altura. Cada sección del árbol se cubió con la fórmula de Smalian y la punta con la del cono; el volumen total por individuo se obtuvo sumando todas sus secciones cubicadas. Se evaluó la calidad de ajuste estadístico de seis modelos de ahusamiento de tipo segmentado y se eligió el de Fang *et al.* (2000), que describe mejor el perfil fustal. Este se ajustó, en forma simultánea, con su expresión de volumen comercial, mediante la técnica de modelos mixtos, y en el resultante se corrigió la heterocedasticidad ponderando la varianza de los errores con la función exponencial y un factor de ponderación en la altura comercial, solo para el ahusamiento; la autocorrelación se corrigió modelando el término de error, para ello se usó una estructura continua autorregresiva de primer orden (AR(1)). El sistema de cubicación, a nivel de árbol (SCAI), quedó conformado por ecuaciones que modelan el perfil fustal, estiman el volumen comercial y total, así como la altura comercial a un diámetro mínimo en la punta del fuste y viceversa. El SCAI permite calcular el volumen por tipo de producto según el uso industrial requerido, lo que posibilita realizar estimaciones volumétricas de encino por unidad de superficie.

Palabras claves: Bosque de encino, distribución de productos, modelo de ahusamiento, perfil fustal, sistema de cubicación individual, volumen comercial.

Abstract

Taper data of 124 specimens of the *Quercus* genus were processed. The sample was obtained using the destructive method (felling, limbing and sectioning) in forests under management in the state of *Puebla*, Mexico. 1 709 pairs of diameter-height data were collected. Each section of the tree was cubed using Smalian's formula, and the tip by the cone volume formula. The total volume per individual was calculated by adding all its cubed sections. The quality of the statistical adjustment of six segmented taper models was assessed, and the model of Fang *et al.* (2000) was selected because it best describes the stem profile. The latter was simultaneously adjusted with its expression of commercial volume, using the mixed model technique, and the heteroskedasticity was corrected in the resulting model by weighting the error variance with the exponential function and with a weighting factor in the commercial height exclusively for the taper; the autocorrelation was corrected by modeling the error term; for this purpose, a first-order continuous autoregressive structure (AR(1)) was utilized. The cubing system for individual trees (CSIT) was formed by equations that model the stem profile and estimate the total and commercial volume, as well as the commercial height at a minimum diameter at the tip of the stem, and vice versa. The CSIT makes it possible to carry out volumetric estimations of oak trees per surface area unit.

Key words: Oak forest, product distribution, taper model, stem profile, individual cubing system, commercial volume.

Fecha de recepción/Reception date: 22 de julio de 2016; Fecha de aceptación/ Acceptance date: 12 de marzo de 2017.

¹ Campo Experimental San Martinito. CIR - Golfo Centro. INIFAP. México. Correo-e: tamarit.juan@inifap.gob.mx

² Cenid Comef. INIFAP. México.

³ Campo Experimental Valle del Guadiana. CIR - Norte Centro. INIFAP. México.

Introducción

México posee una gran diversidad de especies forestales con importancia maderable, entre las que destacan por su abundancia, distribución y aprovechamiento comercial las del género *Quercus* (encino). En el año 2013, se registró una producción maderable en el país de 511 461 m³ r de encino, lo que representó 8.7 % con respecto al total nacional, que correspondió a la segunda más importante, después del *Pinus* (Semarnat, 2014). Aunque el número de especies de *Quercus* en México no se conoce con exactitud, Valencia (2004) cita para el estado de Puebla 33 taxones de un total de 161 identificados en el territorio nacional.

El aprovechamiento de la madera de encino constituye una fuente importante, en términos de volumen e ingresos, para los silvicultores no solo del estado de Puebla, sino de México. Sin embargo, en la elaboración de programas de manejo forestal, la estimación del volumen fustal para árboles de *Quercus* spp. se realiza con modelos que datan de hace más de 35 años. Por tanto, en la entidad existe la necesidad de realizar estudios para generar modelos que permitan realizar estimaciones de volumen maderable precisas; que se fundamenten en procedimientos estadísticos rigurosos y que resulten justos al utilizarlos como apoyo en las operaciones de compra - venta.

En la actualidad, hay consenso, a nivel mundial, sobre la necesidad de aplicar en los sistemas forestales de todo el planeta lo que se ha definido como una gestión forestal sostenible; es decir, con una filosofía ambientalmente responsable, socialmente beneficiosa y económicamente viable (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). Un factor que contribuye a lograr este objetivo es obtener funciones de volumen para árboles individuales como una alternativa de cuantificación confiable. A través de un mayor y mejor uso de técnicas estadísticas, particularmente, de los procedimientos de regresión y de la modelación matemática, tales ecuaciones permiten alcanzar reducciones considerables de costos, en la búsqueda de optimizar la distribución de productos forestales maderables previo a su industrialización, sin menoscabo de la precisión en las estimaciones (Pompa-García y Solís-Moreno, 2008).

En México, recientemente se han desarrollado modelos de volumen total y comercial; sin embargo, han sido, en su mayoría para especies de *Pinus* (Corral Rivas-Rivas *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2013; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014); por lo que son escasos los modelos de volumen para especies mexicanas de *Quercus*. La SARH (1978) consigna un modelo de volumen para encinos de Puebla, y el cual se utiliza para estimar el volumen en los inventarios forestales. Pompa-García y Solís-Moreno (2008) y Pompa-García *et al.* (2009) desarrollaron para Chihuahua modelos de ahusamiento, que al integrarlos matemáticamente generan una ecuación que estima el volumen comercial y total. Ante este escenario, es necesario desarrollar modelos y

Introduction

Mexico has a great diversity of forest species with timber significance, among which those of the *Quercus* (oak) genus stand out for their abundance, distribution and commercial exploitation. In the year 2013, an oak timber production of 511 461 m³ rw was registered across the country, an amount that represented 8.7 % of the total national timber production, *Quercus* being the second most important genus, after *Pinus* (Semarnat, 2014). Although the precise number of *Quercus* species in Mexico is unknown, Valencia (2004) cites 33 taxa in the state of Puebla, out of 161 identified nationally.

The exploitation of oak timber is a significant source --in terms of both volume and income-- for the silviculturists not only in the state of Puebla but across Mexico. However, in developing forest management programs, models that are over 35 years old are used to estimate the stem volume for *Quercus* spp. trees. Therefore, studies must be carried out in the state to generate models that may allow accurate estimations of the timber volume, based on rigorous statistic procedures which will prove fair when used as a support for purchase and sale operations.

Today, there is a worldwide consensus on the need to apply, in all the forest systems across the planet, what has been defined as a sustainable forest management, based on an environmentally responsible, socially beneficial and economically viable philosophy (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). A factor that contributes to achieve this goal is the obtainment of volume functions for individual trees as a reliable quantification alternative. Through a wider, better use of statistical techniques, particularly of regression procedures and mathematic modeling, such equations allow considerable cost reductions in the pursuit to optimize the distribution of forest timber products previously to their industrialization, without detriment to the accuracy of the estimations (Pompa-García and Solís-Moreno, 2008).

Total and commercial volume models have recently been developed in Mexico. However, these have been mostly for *Pinus* species (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2013; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014), and therefore, volume models for Mexican *Quercus* species are scarce. The Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (Department of Agriculture and Hydraulic Resources) (SARH, 1978) registers a volume model for oaks in the state of Puebla which is used to estimate the volume in forest inventories. For the state of Chihuahua, Pompa-García and Solís-Moreno (2008) and Pompa-García *et al.* (2009) developed taper models which, when mathematically integrated, result in an equation for the estimation of the total and commercial value. In the face of this scenario, models and cubing systems must be developed for *Quercus* under the technical management conditions that are prevalent in the state of Puebla.

sistemas de cubicación para *Quercus* bajo las condiciones de manejo técnico que prevalecen en el estado de Puebla.

Por lo antes expuesto, el objetivo del presente trabajo fue desarrollar, a partir de un modelo de ahusamiento de tipo segmentado, un sistema de cubicación a nivel de árbol individual (SCAI) para encinos que crecen en bosques bajo manejo en la entidad referida. El sistema constituye una herramienta técnica de utilidad práctica y operativa de apoyo para el tomador de decisiones que se encarga del manejo y aprovechamiento técnico de ese importante recurso forestal maderable.

Materiales y Métodos

Los datos de ahusamiento y volumen que se utilizaron fueron colectados en la Unidad de Manejo Forestal (Umafor) 2108 “Chignahuapan-Zacatlán” y en la 2101 “Izta-Popo”. El tamaño total de la muestra procesada fue de 124 árboles de *Quercus laurina* y *Q. rugosa*, la cual se conformó de arbolado con diferentes categorías diamétricas y de altura, seleccionados en varios frentes de corta en bosques bajo manejo distribuidos en el área de estudio.

La toma de datos se realizó mediante el método destructivo. Cada árbol seleccionado se derribó, seccionó y desramó. En un formato predefinido se registraron las mediciones de diámetro con corteza en centímetros y alturas (HM) correspondientes, en metros, desde la base (ras del suelo), a la altura del tocón (hb), a los 30 cm y 60 cm posteriores a este, y a 1.3 m con un flexómetro *Stanley*® de 5 m.

A partir del diámetro normal se seccionó a cada 2.5 m hasta la altura total (H). Se consideraron 1 709 pares de observaciones diámetro-altura distribuidas a lo largo de los fustes. También se obtuvieron, por separado, las variables diámetro normal (D), altura del tocón y altura total (H); además de la georreferenciación, la pendiente, exposición y altitud del sitio de colecta de cada árbol con un geoposicionador tipo *eTrex Vista* marca *Garmin* y un clinómetro tipo *PM-5 Tandem* marca *Suunto*. En el Cuadro 1 se muestra un resumen de los estadísticos descriptivos básicos de las principales variables de la muestra colectada.

For the above reasons, the objective of this work was to develop, based on a segmented taper model, a cubing system for individual trees (CSIT) for oak trees growing in forests under management in that state. The system is a practical, operative technical tool to support decision makers in charge of the management and technical exploitation of this important forest timber resource.

Materials and Methods

The utilized taper and volume data were collected in the Forest Management Units (*Unidades de Manejo Forestal*, Umafor) 2108, “Chignahuapan-Zacatlán”, and 2101, “Izta-Popo”. The total size of the processed sample consisted of 124 *Quercus laurina* and *Q. rugosa* trees of various diameter and height categories, selected in different pruning fronts in forests under management distributed in the study area.

The data were collected using the destructive method. Each selected tree was felled, sectioned and limbed. The measurements of the diameter with bark were recorded in centimeters, and the corresponding heights (HM), in meters, from the base up (level with the ground), at stump height (SH), at 30 cm, and at 60 cm above the stump, and at 1.3 m, with a 5 m *Stanley*™ flexometer.

The tree was sectioned at every 2.5 m from the normal diameter up to the total height (H). 1 709 pairs of diameter-height observations distributed along the stems were considered. The normal diameter (D), stump height and total height (H) were obtained separately, and so were the georeferentiation, slope, exposure and altitude of the site from which each tree was collected with a *Garmin eTrex* type GPS and a *Suunto PM-5 Tandem* type inclinometer. Table 1 summarizes the basic descriptive statistics of the main variables of the collected sample.



Cuadro 1. Estadísticos básicos de la muestra de árboles de *Quercus* spp.

Variable	Máximo	Medio	Mínimo	D.E.
Diámetro normal (D) con corteza (cm)	55.00	32.31	8.90	12.58
Altura total (H) (m)	28.74	19.33	7.80	4.94
Altura HM de la sección a partir del tocón (m)	28.74	7.65	0.00	7.27
Diámetro (d) con corteza (cm) a la altura HM	85.00	22.55	0.00	16.40

D.E. = Desviación estándar.

Table 1. Basic statistics of the utilized *Quercus* spp. tree sample.

Variable	Maximum	Medium	Minimum	S. D.
Normal diameter (D) with bark (cm)	55.00	32.31	8.90	12.58
Total height (H) (m)	28.74	19.33	7.80	4.94
Height HM of the section above the stump (m)	28.74	7.65	0.00	7.27
Diameter (d) with bark (cm) at HM height	85.00	22.55	0.00	16.40

S.D. = Standard deviation.

La cubicación de las secciones se realizó con la fórmula de Smalian y la última sección, que corresponde a la punta del árbol, se cubicó con la fórmula del cono. El volumen total del fuste se calculó a partir de la sumatoria por árbol a partir de cada una de las secciones cubicadas de cada árbol.

The sections were cubed using Smalian's formula, and the last section, corresponding to the tip of the tree, was cubed using the cone volume formula. The total stem volume was estimated based on the summation per tree, determined by each of the cubed sections of each tree.

$$V_s = \left[\frac{S_0 + S_1}{2} \right] L \qquad V_p = \frac{S_b S_0}{3} \qquad V_s = \left[\frac{S_0 + S_1}{2} \right] L \qquad V_p = \frac{S_b S_0}{3}$$

Donde:

- V_s = Volumen de la sección (troza)
- S_0 y S_1 = Áreas de las secciones transversales de los extremos de la sección
- L = Longitud de la sección
- V_p = Volumen de la sección que corresponde a la punta del árbol
- S_b = Área de la base de la sección de la punta del árbol
- h_0 = Longitud de la sección de la punta del árbol

Where:

- V_s = Volume of the section (log)
- S_0 and S_1 = Surface areas (Areas) of the cross-sections of the ends of the section
- L = Length of the section
- V_p = Volume of the section corresponding to the tip of the tree
- S_b = Surface area from the base of the section to the tip of the tree
- h_0 = Length of the tree tip section

Previo al procesamiento de la información, la base de datos de chusamiento fue auditada. Mediante la elaboración de gráficos, se verificó que en cada árbol se presentaran comportamientos lógicos de las variables que involucran al perfil fustal y al volumen acumulado, con respecto a la altura (Figura 1a y Figura 1b).

The taper database was audited before the information was processed. For every tree, charting was used to verify the occurrence of logical behaviors of the variables involving the stem profile and the aggregated volume in relation to the height (Figure 1a and Figure 1b).

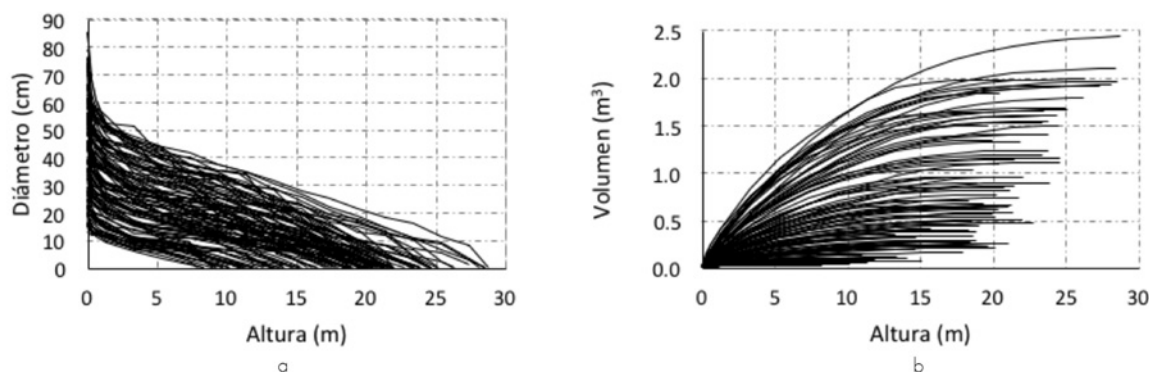


Figura 1. Comportamiento gráfico lógico del perfil fustal (a) y del volumen acumulado con respecto a la altura sobre el fuste (b).

Figure 1. Logical graphic behavior of the stem profile (a) and of the aggregated volume in relation to the height above the stem base (b).

También, como parte de la auditoría, se elaboró un gráfico de los diámetros relativos (d/D_n) versus las alturas relativas (h/H) (Figura 2), en el que se verificó el correcto comportamiento lógico de la información, que de acuerdo con Pompa-García y Solís-Moreno (2008): la amplitud de los datos refleja la magnitud de la forma de los árboles que conformaron la muestra utilizada.

Furthermore, as part of the audit, a chart of the relative diameters (d/D_n) versus relative heights (h/H) (Figure 2) verified the correct logical behavior of the information, for, according to Pompa-García and Solís-Moreno (2008), the range of the data reflects the magnitude of the shape of the trees of which the utilized sample consisted.

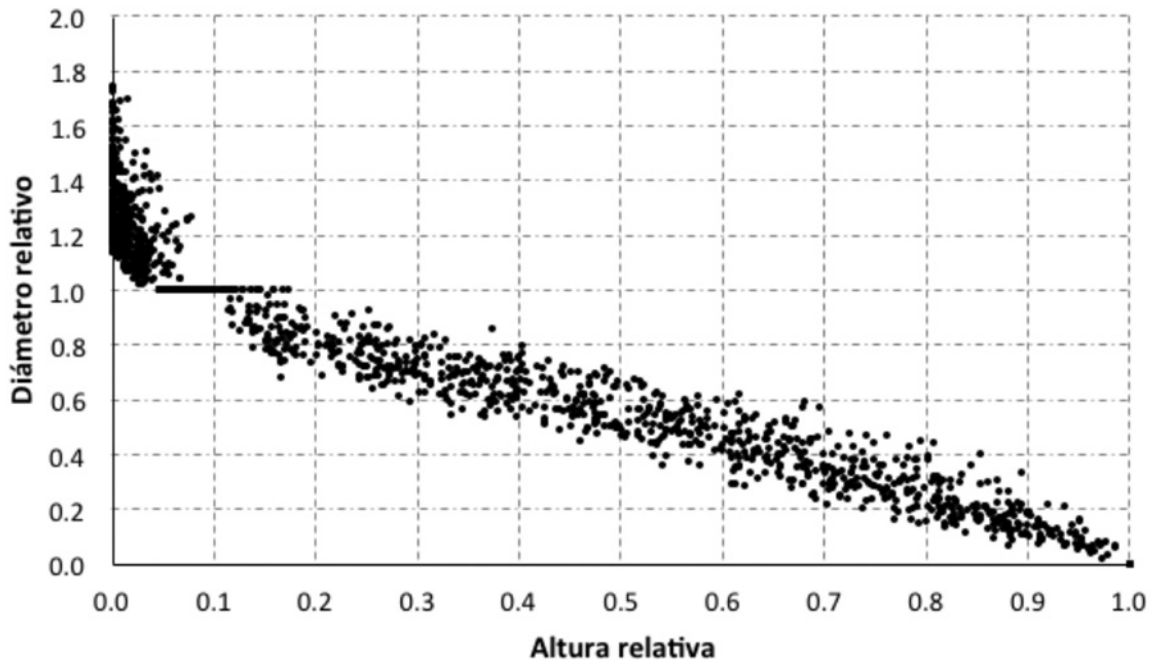


Figura 2. Dispersión de los diámetros relativos frente a las alturas relativas de la muestra de árboles colectada y procesada en el ajuste de modelos de ahusamiento.

Figure 2. Dispersion of the relative diameters versus the relative heights of the tree sample collected and processed in the adjustment of taper models.

Se evaluaron seis modelos de ahusamiento (d) de tipo segmentado (Cuadro 2) para modelar el perfil fustal de los árboles de *Quercus* spp., los cuales se caracterizan por ser compatibles con su respectiva función de volumen comercial. Estos modelos asumen puntos de cambio de cuerpo dendrométrico (neiloide, paraboloides y cono) que conforman el fuste del árbol.

Los modelos 1, 2, 4 y 5 asumen, teóricamente, la existencia de dos puntos de inflexión en el fuste, por lo que suponen tres formas geométricas (segmentos) en que se integra el fuste: la base, como un neiloide; la parte central, como un paraboloides; y la punta, como un cono. Esos modelos describen las tres formas dendrométricas a través del ajuste de las ecuaciones de los segmentos descritos, que están unidos matemáticamente formando una sola expresión de ahusamiento. El resto de los modelos (3 y 6) suponen que existe un solo punto de inflexión.

Six segmented taper models (d) (Table 2) were assessed in order to model the stem profile of the *Quercus* spp. trees, which are characterized by their compatibility with their respective commercial volume function. These models assume that the tree stem is made up of dendrometric body change points (neiloid, paraboloid and cone).

Theoretically, models 1, 2, 4 and 5 assume the existence of two inflection points in the stem, and therefore they suppose that the stem is made up of three geometric forms (segments): the base, as a neiloid; the central part, as a paraboloid, and the tip, as a cone. These models describe the three dendrometric shapes through the adjustment of the equations of the segments described above, which are mathematically joined to form a single taper expression. The rest of the models (3 and 6) assume the existence of a single inflection point.



Cuadro 2. Modelos de ahusamiento de tipo segmentado evaluados para generar el sistema de cubicación a nivel de árbol individual de *Quercus* spp.

Modelo	Función de ahusamiento (d)
1 Max y Burkhart (1976)	$d = D[B_1(q-1) + B_2(q^2-1) + B_3(p_1-q)^2 l_1 + B_4(p_2-q)^2 l_2]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; 0 \text{ de otra forma}$ $l_2 = 1 \text{ si } q \leq p_2; 0 \text{ de otra forma}$
2 Cao et al. (1980)	$d = D \frac{C_0}{k} [2z + B_1(3z^2 - 2z) + B_2(z - p_1)^2 l_1 + B_3(z - p_2)^2 l_2]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; 0 \text{ de otra forma}$ $l_2 = 1 \text{ si } z \geq p_2; 0 \text{ de otra forma}$
3 Parresol et al. (1987)	$d = D[z^2(B_1 + B_2z) + (z - p_1)^2(B_3 + B_4(z+2p_1))]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; 0 \text{ de otra forma}$
4 Zepeda y Domínguez (1997)	$d = D[B_1X + B_2X^2 + B_3(p_1 - X) l_1 + B_4(p_2 - X)^2 l_2]$ $l_1 = 1 \text{ si } X \geq p_1; 0 \text{ de otra forma}$ $l_2 = 1 \text{ si } X \geq p_2; 0 \text{ de otra forma}$
5 Fang et al. (2000)	$d = C_1 \left[H \frac{k - B_1}{B_1} (1 - q) \frac{k - \beta}{\beta} \alpha_1^{l_1 + l_2} \alpha_2^{l_2} \right]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; 0 \text{ de otra forma}$ $l_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; 0 \text{ de otra forma}$
6 Zhang et al. (2002)	$d = DH^{(k_1 - B_1)/2B_1} [a l_1 (1 - q)^{(k_1 - B_1 - 1 - l_1 B_2^{l_1})/B_1} B_1^{1 - l_1 B_2^{l_1}}]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } q > p_2 \text{ y } 0 \text{ si } q \leq p_1$

Table 2. Segmented tapering models evaluated to generate the cubing system for individual *Quercus* spp. trees.

Model	Taper function (d)
1 Max and Burkhart (1976)	$d = D[B_1(q-1) + B_2(q^2-1) + B_3(p_1-q)^2 l_1 + B_4(p_2-q)^2 l_2]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; 0 \text{ with a different shape}$ $l_2 = 1 \text{ si } q \leq p_2; 0 \text{ with a different shape}$
2 Cao et al. (1980)	$d = D \frac{C_0}{k} [2z + B_1(3z^2 - 2z) + B_2(z - p_1)^2 l_1 + B_3(z - p_2)^2 l_2]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; 0 \text{ with a different shape}$ $l_2 = 1 \text{ si } z \geq p_2; 0 \text{ with a different shape}$
3 Parresol et al. (1987)	$d = D[z^2(B_1 + B_2z) + (z - p_1)^2(B_3 + B_4(z+2p_1))]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; 0 \text{ with a different shape}$

Continue Table 2..

Continue Table 2...

Model	Taper function (d)
4 Zepeda and Domínguez (1997)	$d = D[B_1X + B_2X^2 + B_3(p_1 - X) l_1 + B_4(p_2 - X)^2 l_2]$ $l_1 = 1 \text{ si } X \geq p_1; 0 \text{ with a different shape}$ $l_2 = 1 \text{ si } X \geq p_2; 0 \text{ with a different shape}$
5 Fang <i>et al.</i> (2000)	$d = C_1 \left[H \frac{k - B_1}{B_1} (1 - q) \frac{k - \beta}{\beta} \alpha_1 l_1 + l_2 \alpha_2 l_2 \right]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; 0 \text{ with a different shape}$ $l_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; 0 \text{ with a different shape}$
6 Zhang <i>et al.</i> (2002)	$d = DH^{k_1 - B_1/2B_1} \left[\alpha l_1 (1 - q)^{(k_1 - B_1 - l_1 B_2 l_1)/B_1} l_1^{1 - l_1 B_2 l_1} \right]^{1/2}$ $l_1 = 1 \text{ si } q > p_2 \text{ y } 0 \text{ si } q \leq p_1$

Los diferentes componentes de los modelos referidos se anotan enseguida.

l_1, l_2 = Variables indicadoras sobre el cambio de cuerpo dendrométrico del fuste.

$\alpha_0 - \alpha_2, B_1 - B_4, c_0, p_1, p_2$ = Parámetros por estimarse

$$\alpha = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1)/B_1 B_2}, H' = \frac{H}{H - 1.3}, k = \pi / 40000, k_1 = \pi/8$$

$$q = \frac{HM}{H}, r_0 = (1 - hb/H)^{k/B_1}, r_1 = (1 - p_1)^{k/B_1}, r_2 = (1 - p_2)^{k/B_2}$$

$$X = (H - HM) / (H - 1.3), z = (H - HM) / H$$

$$c_1 = \left(\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \frac{k}{B_1} / B_1 (r_0 - r_1) + B_2 (r_1 - \alpha_1 r_2) + B_3 \alpha_1 r_2 \right)^{1/2}$$

$$\alpha_1 = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1)/B_1 B_2}, \alpha_2 = (1 - p_2)^{k(B_3 - B_2)/B_2 B_3}, \beta = B_1^{1 - l_1 + l_2} B_2^{l_1} B_3^{l_2}$$

El ajuste de los modelos de ahusamiento se efectuó con método de máxima verosimilitud, con información completa (FILM, por sus siglas en inglés), mediante el procedimiento MODEL del paquete estadístico SAS/ETS® (SAS, 2008). La calidad del ajuste de los modelos se determinó comparando cuatro estadísticos utilizados con frecuencia en la modelación forestal (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2013; Tamarit *et al.*, 2014): el coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}), el sesgo (E), la raíz del cuadrado medio del error (RCME) y el criterio de información de Akaike (AIC), mismos que se expresan como:

Donde:

$$R^2_{adj} = 1 - (n - 1) \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (n - p) \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{n}$$

The various components of the referred models are listed below.

l_1, l_2 = Indicator variables for the change of stem dendrometric body

$\alpha_0 - \alpha_2, B_1 - B_4, c_0, p_1, p_2$ = Parameters to be estimated

$$\alpha = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1)/B_1 B_2}, H' = \frac{H}{H - 1.3}, k = \pi / 40000, k_1 = \pi/8$$

$$q = \frac{HM}{H}, r_0 = (1 - hb/H)^{k/B_1}, r_1 = (1 - p_1)^{k/B_1}, r_2 = (1 - p_2)^{k/B_2}$$

$$X = (H - HM) / (H - 1.3), z = (H - HM) / H$$

$$c_1 = \left(\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} \frac{k}{B_1} / B_1 (r_0 - r_1) + B_2 (r_1 - \alpha_1 r_2) + B_3 \alpha_1 r_2 \right)^{1/2}$$

$$\alpha_1 = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1)/B_1 B_2}, \alpha_2 = (1 - p_2)^{k(B_3 - B_2)/B_2 B_3}, \beta = B_1^{1 - l_1 + l_2} B_2^{l_1} B_3^{l_2}$$

The fit of the taper models was carried out using the full information maximum likelihood (FIML) method, with the MODEL procedure of the SAS/ETS® statistical software package (SAS, 2008). The quality of fit of the models was determined by comparing four statistics that are frequently used in forest modeling (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2013; Tamarit *et al.*, 2014): the adjusted determination coefficient (R^2_{adj}), the bias (E), the root of the mean square error (RMSE), and the Akaike information criterion (AIC), which are expressed as:

Where:

$$R^2_{adj} = 1 - (n - 1) \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (n - p) \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{n}$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}}$$

$$AIC = 2p + n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \right)$$

Y_i, \hat{Y}_i y \bar{Y}_i = Valor observado, predicho y medio del ahusamiento (d), respectivamente

n = Número total de observaciones usadas para ajustar los modelos

p = Número de parámetros del modelo a estimar

Con la finalidad de facilitar la elegibilidad del mejor modelo, además de los cuatro estadísticos referidos, también se consideraron como criterios de selección: la suma de cuadrados del error (SCE), el cuadrado medio del error (CME) y el valor de verosimilitud (logLik).

Con base en Sakici *et al.* (2008), se utilizó un criterio de calificación que consistió en jerarquizar los estadísticos de los modelos; para ello, se asignaron valores consecutivos del 1 al 6, en función del orden de importancia (1 correspondió al mejor valor del estadístico y 6 al más deficiente); la calificación total de cada modelo se obtuvo por la sumatoria de los valores obtenidos. El mejor modelo correspondió al de menor calificación.

El mejor modelo de ahusamiento seleccionado se ajustó, de manera simultánea, con su respectiva función de volumen comercial, esto para aprovechar la compatibilidad existente entre ellas, ya que comparten los mismos parámetros. Para efectos de comparación en la calidad de ajuste, primero se ajustó el sistema por mínimos cuadrados ordinarios no lineales (NLS), enseguida se usó la técnica de modelos de efectos mixtos (MEM), la cual en su formulación incluye los parámetros fijos comunes a toda la muestra y un parámetro aleatorio específico de cada unidad de muestreo.

Al usar el MEM se mejora la calidad de los parámetros fijos haciéndolos más eficientes, ya que su varianza es menor debido a que sus errores son bajos, y por tanto, los estimadores son más eficientes, precisos y confiables; por lo que es posible hacer estimaciones promedio de las variables de interés con alta certidumbre (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006).

Actualmente, los MEM se han convertido en un método común para analizar datos de naturaleza longitudinal, en sitios donde se han realizado mediciones repetidas sobre la misma unidad experimental, y la estructura de las observaciones es irregular y desbalanceada (Budhathoki, 2006); características que se tuvieron en el presente estudio.

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}}$$

$$AIC = 2p + n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \right)$$

Y_i, \hat{Y}_i and \bar{Y}_i = Observed, predicted and mean taper value (d), respectively

n = Total number of observations used to adjust the models

p = Number of parameters of the model to be estimated

In order to facilitate the eligibility of the best model, besides the four referred statistics, the following were also considered as selection criteria: the sum of squared errors (SSE), the mean square error (MSE) and the likelihood value (logLik).

Based on Sakici *et al.* (2008), a scoring criterion that consists in organizing the statistics of the models by hierarchy was utilized; for this purpose, consecutive values from 1 to 6 were assigned by order of importance (1 corresponding to the best value of the statistic, and 6, to the most deficient); the total score of each model was estimated according to the summation of the values obtained. The best model was the one with the lowest score.

The best taper model selected was simultaneously adjusted, with its respective commercial value function, in order to profit from the existing compatibility between them, as they share the same parameters. For purposes of comparison in the quality of the fit, the system was first adjusted by non-linear ordinary minimum squares (NLS); then, the mixed effects models technique (MEM) --whose formulation includes the fixed parameters that are common to the entire sample and a specific random parameter for each sampling unit-- was utilized.

The use of MEM improves the quality of the fixed parameters, rendering them more efficient, as they have a lower variance because their errors are low, and, therefore, the estimators are more efficient, accurate and reliable; this allows to make average estimations of the variables of interest with a high level of certainty (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006).

Today, MEM has become a common method for analyzing longitudinal data in sites where repeated measurements have been taken of the same experimental unit and the structure of the observations is irregular and imbalanced (Budhathoki, 2006), all of which occurred in the present study.



Con base en Hall y Clutter (2004) y Fang y Bailey (2001), se usó un arreglo de los datos en forma de estructura bivariada que permitió incluir el efecto aleatorio al incorporar en el ajuste la técnica de MEM. El sistema compatible de ahusamiento-volumen quedó expresado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} d_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D_r, H_r, hb_r, HM_{ij}; \rho) & 0 \\ 0 & g(k, D_r, H_r, hb_r, HM_{ij}; \rho) \end{pmatrix} + e_i$$

Donde:

- d_i = Vector de observaciones de ahusamiento en el i -ésimo árbol
- V_i = Vector de observaciones de volumen comercial en el i -ésimo árbol
- $f()$ = Estructura del modelo de ahusamiento
- $g()$ = Modelo de volumen comercial
- ρ = Vector de parámetros a estimar del sistema

El efecto aleatorio se definió e incluyó solo sobre el parámetro B_1 , se definió así para controlar la variación específica a nivel de árbol, con ello evitar tener una sobre parametrización, para no hacer un sobreajuste al modelo y que los parámetros fijos no pierdan sensibilidad, ya que sobre éstos se realizan las inferencias. Quedó expresado de la forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{1i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

- B_1 = Único parámetro con efecto mixto (fijo y aleatorio) que se representa como $B_1 + b_{1i}$
- b_{1i} = Parámetro con efecto aleatorio que, a su vez, se define como:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ y } b_{1i} \sim N(0, \varphi^2)$$

Los ajustes se realizaron usando el paquete NLME del programa estadístico R, versión 2.14.0 (R Development Core Team, 2009). Para compensar posibles pérdidas en grados de libertad y lograr una convergencia más rápida y estable, en el ajuste del sistema por MEM se consideró máxima verosimilitud restringida y se corrigieron los problemas de heterocedasticidad y de autocorrelación, lo que permite llevar a cabo de manera sólida las pruebas de hipótesis habituales sobre los parámetros; además de, estimar intervalos de confianza más realistas (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001; Fang y Bailey, 2001).

Based on Hall and Clutter (2004) and on Fang and Bailey (2001), the data were arranged in the form of a bivariate structure that made it possible to include the random effect by incorporating the MEM technique into the adjustment. The compatible taper/volume estimation system was expressed as follows:

$$\begin{pmatrix} d_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D_r, H_r, hb_r, HM_{ij}; \rho) & 0 \\ 0 & g(k, D_r, H_r, hb_r, HM_{ij}; \rho) \end{pmatrix} + e_i$$

Where:

- d_i = Observation vector for tapering in the i th tree
- V_i = Observation vector for commercial volume in the i th tree
- $f()$ = Structure of the taper model
- $g()$ = Commercial volume model
- ρ = Vector for system parameters to be estimated

The random effect was defined and included only the parameter B_1 , which was thus defined in order to control the specific variation at individual tree level, and so, to prevent excess parametrization, overfit of the model and loss of sensitivity of the parameters, given that inferences are based on the latter. It was expressed as follows:

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{1i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Where:

- B_1 = Only parameter with mixed effect (fixed and random) represented as $B_1 + b_{1i}$
- b_{1i} = Parameter with random effect which, in turn, is defined as:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ y } b_{1i} \sim N(0, \varphi^2)$$

Fits were carried out using the NLME package of the R statistical software, version 2.14.0 (R Development Core Team, 2009). In order to compensate potential losses in degrees of freedom and achieve a quicker, more stable convergence in the adjustment of the system with MEM, a restricted maximum likelihood was considered, and the heteroskedasticity and autocorrelation problems were corrected; this allows solid testing of habitual hypotheses regarding the parameters, as well as estimating more realistic confidence intervals (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001; Fang and Bailey, 2001).

La heterocedasticidad se corrigió mediante la modelación y ponderación de la varianza de los errores, con la función exponencial (e). El factor de ponderación fue sobre HM solo para el ahusamiento (d_j) y se dejó constante el volumen comercial (V_j), la función quedó estructurada como:

$$w(HM, d_j, V_j, \Phi) = e^{\Phi(HM*(1-f)+f)}$$

Donde:

- Φ = Parámetro por ser estimado
- f = Variable indicadora que toma el valor de 1 para el ahusamiento y 0 para el volumen comercial

La corrección por autocorrelación se hizo modelando el término de error (e_{ij}), para ello se utilizó una estructura continua autorregresiva de primer orden (AR(1)), expresada como:

$$e_{ij} = \psi_1 \rho_1^{t_{ij} - t_{ij-1}} e_{ij-1} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

- e_{ij} = j -ésimo residuo ordinario en el i -ésimo árbol
- $\psi_1 = 1$ para $j > k$ y cero para $j = 1$
- ρ_1 = Parámetro autorregresivo de orden 1 por ser estimado
- $t_{ij} - t_{ij-1}$ = Distancia que separa las observaciones j y $j-1$ dentro de cada árbol
- ε_{ij} = Término del error bajo la condición de independencia

Resultados y Discusión

Comparativo del ajuste de los modelos de ahusamiento

Los valores de las estimaciones de los parámetros de los seis modelos de ahusamiento probados se presentan en el Cuadro 3. Para los modelos 3 y 6 que teóricamente asumen la existencia de un punto único de inflexión, se determinó que al menos uno de sus parámetros fue estadísticamente no significativo; razón suficiente por la que fueron descartados, sin que hayan sido objeto de mayor análisis.

En los modelos que asumen tres formas geométricas (segmentos), y por tanto dos puntos de inflexión en que se conforma el fuste, se determinó que solo los modelos 4 y 5 fueron, en todos sus parámetros, altamente significativos, por lo que se infiere que los fustes de las especies de encino estudiadas presentan esta condición.

Así, para estos modelos, el primer punto de inflexión en donde ocurre el cambio de neiloide a paraboloides (p_1) es a 39 % y 4 % con relación a la altura total, respectivamente. En tanto que, el segundo punto de inflexión (p_2) en el que sucede el cambio de paraboloides a cono es 89 % y 78 %, respectivamente.

Heteroskedasticity was corrected through modeling and weighting of the variance of the errors, with the exponential function (e). The weighting factor was based on the HM exclusively for tapering (d_j), and the commercial volume (V_j) was left constant; the function was structured as:

$$w(HM, d_j, V_j, \Phi) = e^{\Phi(HM*(1-f)+f)}$$

Where:

- Φ = Parameter to be estimated
- f = Indicator variable which takes on the value of 1 for tapering and of 0 for the commercial volume

The correction by autocorrelation was carried out by modeling the error term (e_{ij}); for this purpose, a first-order continuous autoregressive structure (AR(1)) was used, expressed as:

$$e_{ij} = \psi_1 \rho_1^{t_{ij} - t_{ij-1}} e_{ij-1} + \varepsilon_{ij}$$

Where:

- e_{ij} = j^{th} ordinary residue in the i^{th} tree
- $\psi_1 = 1$ for $j > k$ and zero for $j = 1$
- ρ_1 = First order autoregressive parameter to be estimated
- $t_{ij} - t_{ij-1}$ = Distance separating the j and $j-1$ observations in each individual tree
- ε_{ij} = Independent error term

Results and Discussion

Comparison of the fit of taper models

The values of the estimates of the parameters of the six tested tapering models are shown in Table 3. For models 3 and 6, which theoretically assume the existence of a single inflexion point, it was determined that at least one of their parameters was statistically insignificant; this was a sufficient reason to dismiss them without subjecting them to any further analysis.

In models assuming that the stem consists of three geometric shapes (segments), and therefore two inflection points, it was determined that only models 4 and 5 were highly significant in all their parameters; therefore, it is inferred that the stems of the studied oak species exhibit this condition.

Thus, for these models, the first inflection point, where the change from neiloid to paraboloid (p_1) occurs, is at 39 % and 4 % of the total height, respectively, while the second (p_2), in which the change from paraboloid to cone occurs, is at 89 % and 78 %, respectively.



Los resultados antes descritos son similares a los obtenidos por Vargas-Larreta (2013) con el modelo de Fang *et al.* (2000) para encinos del estado de Chihuahua. El autor indica que tales cambios de geometría suceden a 9 y 80 %, con respecto a la altura total de los árboles. Los modelos 1 y 2 presentaron parámetros no significativos, por lo que también fueron descartados.

The results described above are similar to those obtained by Vargas-Larreta (2013) with the model of Fang *et al.* (2000) for oaks in the state of *Chihuahua*. The author points out that these changes of geometry occur at 9 and 80 % in relation to the total height of the trees. Models 1 and 2 exhibited insignificant parameters, and therefore they were also dismissed.

Cuadro 3. Estimaciones de los parámetros de los modelos segmentados para ahusamiento para describir el perfil diamétrico de árboles de encino.

Modelo	Parámetros de los modelos ajustados					
	B_1	B_2	B_3	B_4	p_1	p_2
1	-2.240300*	1.078778*	180.7061	-0.1148*	0.0617	0.8942*
2***	1.001468	-2.61668*	72.65692*		0.0081*	0.9396
3	1.9420	-0.7758	-45.3500*	23.9100*	0.8442	
4	2.1300	-1.9200	1.8300	12.7700	0.3900	0.8960
5**	0.00001	0.00003	0.00003		0.0421	0.7844
6	0.087939	0.120637*			-0.0913	

* = Valor no significativo; ** = Valores de los parámetros a_0 , a_1 , y a_2 de 0.00006, 1.96361 y 0.80361 respectivamente; *** = Valor del parámetro c_0 = 0.000197.

Table 3. Estimations of the parameters of the segmented tapering models for describing the diameter profile of oak trees.

Model	Parameters of the fitted models					
	B_1	B_2	B_3	B_4	p_1	p_2
1	-2.240300*	1.078778*	180.7061	-0.1148*	0.0617	0.8942*
2***	1.001468	-2.61668*	72.65692*		0.0081*	0.9396
3	1.9420	-0.7758	-45.3500*	23.9100*	0.8442	
4	2.1300	-1.9200	1.8300	12.7700	0.3900	0.8960
5**	0.00001	0.00003	0.00003		0.0421	0.7844
6	0.087939	0.120637*			-0.0913	

* = Insignificant value; ** = Values of the parameters a_0 , a_1 , and a_2 , of 0.00006, 1.96361 and 0.80361 respectively; *** = Value of the parameter c_0 =0.000197.

Comparativamente, el modelo 5 (Fang *et al.*, 2000) mostró ser el de mejor calidad de ajuste, ya que tuvo la calificación total más baja (Cuadro 4); dado sus menores valores en la SCE, CME, RCME y AIC, además del mayor valor de verosimilitud (loglik) y el más alto de la R^2_{adj} . Este modelo explica en 97.59 % la variabilidad total del ahusamiento observado, con la más alta precisión. Asimismo, todos los criterios de bondad, excepto el sesgo, fueron los más favorables; por lo que fue seleccionado para describir el perfil diamétrico del fuste de árboles de encino.

Comparatively, model 5 (Fang *et al.*, 2000) proved to have the best adjustment quality, as its total score was the lowest (Table 4), given its lower values for SSE, MSE, RMSE and AIC, and its higher likelihood (loglik) and R^2_{adj} values. This model accounts for 97.59 % of the total variability of the observed tapering, with the highest accuracy. Furthermore, all the criteria for goodness, except the bias, were the most favorable; therefore, it was selected to describe the stem diameter profile of oak trees.

El segundo mejor modelo, aun cuando algunos de sus parámetros fueron no significativos, resultó ser el 1 (Max y Burkhart, 1976); seguido en orden de importancia con base en la calificación, por el modelo 2 propuesto por Cao *et al.* (1980). Los de menor calidad de ajuste correspondieron a los que asumen un solo punto de inflexión.

The second best model, even though some of its parameters were insignificant, turned out to be Model 1 (Max and Burkhart, 1976), followed, in order of importance based on the score, by Model 2, proposed by Cao *et al.* (1980). The models with the lowest adjustment quality were those that assume the existence of a single inflection point.

Lo anterior, es similar a lo señalado por Corral-Rivas *et al.* (2007) y Quiñonez-Barraza (2014) para especies del género *Pinus* de Durango; también coincide con lo documentado por Tamarit *et al.* (2014) para *Tectona grandis* establecida en plantaciones en el sureste de México; para *Pinus patula* de bosques bajo manejo de Zaualtipan, Hidalgo (Hernández *et al.*, 2013) y para árboles de *Quercus* en Chihuahua (Pompa-García *et al.*, 2009). En tales casos, el mejor modelo fue el de Fang *et al.* (2000), lo que confirma su alta flexibilidad de adaptación a diferentes especies. El hecho de que los modelos de ahusamiento que asumen tres cuerpos dendrométricos en el fuste hayan resultado como los mejores, puede atribuirse, en parte, a que los taxa de encino analizadas provienen de bosques bajo manejo técnico, en los que la densidad y espaciamiento, resultado del manejo de la estructura horizontal, favorecen la existencia de las tres formas dendrométricas.

La ventaja del modelo seleccionado consiste en tener en forma explícita una ecuación de volumen total, que corresponde al modelo de Schumacher-Hall (parámetros a_0 , a_1 , y a_2 en la función de ahusamiento); aunque es posible incorporar cualquier otra con estructura similar. Además, cuenta con una ecuación implícita de volumen comercial que al obtenerla mediante integración analítica, resulta compatible con la función de ahusamiento; por lo que forman un sistema, el cual es susceptible de ajustarse de manera simultánea Fang *et al.* (2000).

This is similar to the findings of Corral-Rivas *et al.* (2007) and Quiñonez-Barraza (2014) for species of the *Pinus* genus in Durango; it also agrees with the facts documented by Tamarit *et al.* (2014) for *Tectona grandis* L. f. established in plantations of southeastern Mexico; for *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. in forests under management in Zaualtipan, Hidalgo (Hernández *et al.*, 2013), and for *Quercus* trees in Chihuahua (Pompa-García *et al.*, 2009). In these cases, the best model was that of Fang *et al.* (2000), which confirms its high flexibility of adaptation to various species. That the tapering models assuming the presence of three dendrometric bodies in the stem have turned out to be the best may be ascribed, in part, to the fact that the analyzed oak taxa are all from forests under technical management, in which the density and spacing --resulting from the horizontal structure management-- favor the existence of the three dendrometric shapes.

The advantage of the selected model is that it explicitly has a total volume equation, corresponding to the model of Schumacher-Hall (parameters a_0 , a_1 , and a_2 in the taper function); however, any other with similar structure can be incorporated. Furthermore, it includes an implicit commercial volume equation which, when obtained through analytical integration, is compatible with the taper function; these, then, constitute a system, which can be simultaneously fitted to the model of Fang *et al.* (2000).

Cuadro 4. Estadísticos de bondad de ajuste y calificación de los modelos de ahusamiento para describir el perfil diamétrico de árboles de *Quercus*.

Modelo	Valores de los estadísticos en el ajuste y calificación respectiva							Calificación total
	SCE	CME	RCME	R ² adj	Sesgo	AIC	loglik	
1	10 948.6	7.1326	26707	0.9735	0.2288	3 033.5620	-3 697	17
	(2)	(2)	(2)	(2)	(5)	(2)	(2)	
2	10 949.1	7.1329	26708	0.9735	0.2334	3 033.6324	-3 697	24
	(3)	(3)	(3)	(3)	(6)	(3)	(3)	
3	19 576.7	12.7453	3.5701	0.9526	-1.3970	3 927.0810	-4 145	32
	(5)	(5)	(5)	(5)	(2)	(5)	(5)	
4	20 008.4	13.0348	3.6104	0.9516	-1.6762	3 962.6935	-4 162	37
	(6)	(6)	(6)	(6)	(1)	(6)	(6)	
5	9 954	6.4932	2.5482	0.9759	0.0233	2 890.8016	-3 624	9
	(1)	(1)	(1)	(1)	(3)	(1)	(1)	
6	18 662.6	12.1343	3.4834	0.9549	0.2191	3 849.3926	-4 108	28
	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	



Table 4. Goodness-of-fit statistics and scores of the taper models for describing the diameter profile of *Quercus* trees.

Model	Values of the statistics in the adjustment and their respective scores							Total score
	SSE	MSE	RMSE	R ² adj	Bias	AIC	loglik	
1	10 948.6	7.1326	2.6707	0.9735	0.2288	3 033.5620	-3 697	17
	(2)	(2)	(2)	(2)	(5)	(2)	(2)	
2	10 949.1	7.1329	2.6708	0.9735	0.2334	3 033.6324	-3 697	24
	(3)	(3)	(3)	(3)	(6)	(3)	(3)	
3	19 576.7	12.7453	3.5701	0.9526	-1.3970	3 927.0810	-4 145	32
	(5)	(5)	(5)	(5)	(2)	(5)	(5)	
4	20 008.4	13.0348	3.6104	0.9516	-1.6762	3 962.6935	-4 162	37
	(6)	(6)	(6)	(6)	(1)	(6)	(6)	
5	9 954	6.4932	2.5482	0.9759	0.0233	2 890.8016	-3 624	9
	(1)	(1)	(1)	(1)	(3)	(1)	(1)	
6	18 662.6	12.1343	3.4834	0.9549	0.2191	3 849.3926	-4 108	28
	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	

Ajuste simultáneo ahusamiento-volumen comercial por NLS y por MEM

Los valores de los parámetros del ajuste simultáneo del sistema de ahusamiento - volumen comercial por NLS para el modelo 5 resultaron altamente significativos y con errores estándar muy bajos (Cuadro 5). En este sentido, Fang *et al.* (2000) señalan que al estimar todos los parámetros del sistema simultáneamente, se optimiza la suma de cuadrados total de los errores, y con ello se minimiza los errores de predicción, tanto del diámetro a diferentes alturas como del volumen; sin embargo, Diéguez-Aranda *et al.* (2009) refieren que la elección de la alternativa de ajuste del sistema depende del uso principal que tendrá cada función que lo compone, en cuyo caso la función de interés se deberá ajustar, en forma independiente, para optimizar las estimaciones de la variable prioritaria.

Simultaneous fit of taper/commercial value using NLS and MEM

The values of the parameters for the simultaneous adjustment of the taper/commercial value system using NLS for Model 5 turned out to be highly significant, with very low standard errors (Table 5). In this sense, Fang *et al.* (2000) point out that, when all the parameters of the system are estimated simultaneously, the sum of the total error squares is optimized, which minimizes prediction errors both for the diameter at various heights and of the volume. However, according to Diéguez-Aranda *et al.* (2009), the choice of the alternative of fitting the system depends on the main use that each of its functions will have, in which case the function of interest must be adjusted independently in order to optimize the estimations of the priority variable.

Cuadro 5. Estimación de los parámetros y estadísticos del ajuste simultáneo del sistema conformado por los modelos de ahusamiento y volumen comercial al usar NLS.

Parámetro	Estimador	Error Estándar	Valor de t	Nivel de significancia
a_0	0.00006	0.0000029	20.54	<0.0001
a_1	1.96500	0.0158800	123.72	<0.0001
a_2	0.80130	0.0241100	33.23	<0.0001
B_1	0.00001	0.0000002	35.30	<0.0001
B_2	0.00003	0.0000002	172.18	<0.0001
B_3	0.00003	0.0000022	14.82	<0.0001
p_1	0.04209	0.0012910	32.61	<0.0001
p_2	0.82200	0.0403800	20.36	<0.0001

Table 5. Estimation of the parameters and statistics for the simultaneous fitting of the system constituted by the models of tapering and commercial volume, using NLS.

Parameter	Estimator	Standard Error	T value	Significance level
a_0	0.00006	0.0000029	20.54	<0.0001
a_1	1.96500	0.0158800	123.72	<0.0001
a_2	0.80130	0.0241100	33.23	<0.0001
B_1	0.00001	0.0000002	35.30	<0.0001
B_2	0.00003	0.0000002	172.18	<0.0001
B_3	0.00003	0.0000022	14.82	<0.0001
p_1	0.04209	0.0012910	32.61	<0.0001
p_2	0.82200	0.0403800	20.36	<0.0001

La prueba de razón de verosimilitud, que compara entre el ajuste simultáneo del sistema al usar NLS y MEM, sin corregir aún por heterocedasticidad y autocorrelación (MEM-1) resultó significativa ($p < 0.0001$), con el mejor ajuste cuando se usa MEM (Cuadro 6); dados los menores valores en el criterio de información de Akaike (AIC) y en el criterio de información Bayesiano (BIC); así como el mayor valor en la verosimilitud (loglik). El MEM-3 corregido por heterocedasticidad y por autocorrelación fue estadísticamente mejor que cuando solo se corrigió por heterocedasticidad (MEM-2). Con tal corrección, los residuales del MEM son mucho más homogéneos como demuestra la configuración de estacionariedad y no significancia en los primeros retardos (Figura 3), lo que garantiza que los estimadores obtenidos, además de ser insesgados también son los más eficientes (Myers, 1990; Kozak, 1997).

The likelihood ratio test, which compares between the simultaneous adjustments to the system using NLS and MEM, without yet correcting for heteroskedasticity and autocorrelation (MEM-1) turned out to be significant ($p < 0.0001$), the adjustment being best when MEM is used (Table 6); given the lower values in the Akaike information criterion (AIC) and in the Bayesian information criterion (BIC), as well as the highest value for likelihood (loglik). MEM-3, corrected for heteroskedasticity and autocorrelation, was statistically better than when correction was made only for heteroskedasticity (MEM-2). With this two-fold correction, the MEM residuals are much more homogenous, as proven by the stationarity and insignificance configuration in the first delays (Figure 3); this guarantees that the obtained estimators are not only unbiased but also the most efficient (Myers, 1990; Kozak, 1997).

Cuadro 6. Estadísticos del ajuste simultáneo del sistema y prueba de verosimilitud al efectuarlo por NLS y como MEM al corregir heterocedasticidad y autocorrelación.

Modelo	gl ¹	AIC	BIC	loglik	Prueba	R de V ²	Valor de p
MEM-1	10	11 648.25	11 708.59	-5 814.13			
NLS	9	12 391.27	12 445.57	-6 186.63	1 vs 2	745.0132	<0.0001
MEM-1	10	11 648.255	11 708.588	-5 814.127			
MEM-2	11	9 618.356	9 684.722	-4 798.178	1 vs 2	2 031.899	<0.0001
MEM-3	12	7 635.085	7 707.485	-3 805.543	2 vs 3	1 985.27	<0.0001

¹gl = Grados de libertad; ² = Razón de Verosimilitud.



Table 6. Statistics of the simultaneous adjustment of the system and likelihood test with NLS and with MEM.

Model	gl ¹	AIC	BIC	logLik	Test	V ² R	P value
MEM-1	10	11 648.25	11 708.59	-5 814.13			
NLS	9	12 391.27	12 445.57	-6 186.63	1 vs 2	745.0132	<0.0001
MEM-1	10	11 648.255	11 708.588	-5 814.127			
MEM-2	11	9 618.356	9 684.722	-4 798.178	1 vs 2	2 031.899	<0.0001
MEM-3	12	7 635.085	7 707.485	-3 805.543	2 vs 3	1 985.27	<0.0001

¹gl = Degrees of freedom; ² = Likelihood ratio.

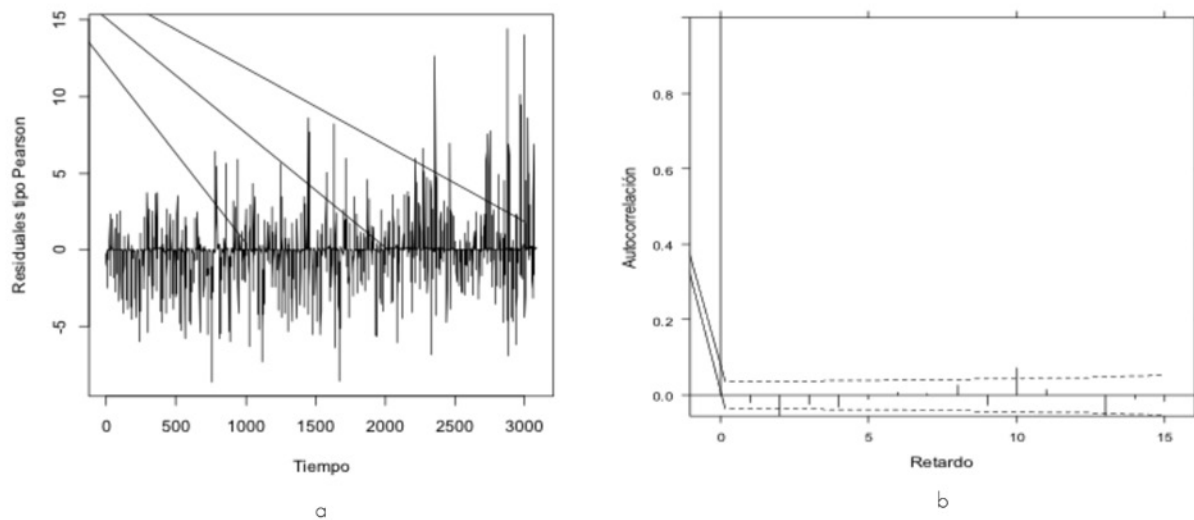


Figura 3. Comportamiento gráfico de los residuales (a) y de retardos (b) después de la corrección por autocorrelación del sistema compatible, al usar una estructura tipo AR(1).

Figure 3. Graphic behavior of the residuals (a) and of the delays (b) after the correction for autocorrelation of the compatible system, using a structure of the AR(1) type.

El ajuste simultáneo del sistema compatible d-Vc, mediante MEM corregido por heterocedasticidad y autocorrelación (MEM-3) de la más alta calidad se presenta en el Cuadro 7. Los intervalos para los parámetros con efectos fijos fueron estrechos, indicativo de un mayor nivel de exigencia y mejor calidad, lo cual evidencia que el uso de la técnica de MEM es un refinamiento favorable en la técnica de ajuste del sistema para hacer estimaciones e inferencias más precisas del ahusamiento y del volumen comercial.

El beneficio adicional del ajuste con el enfoque de MEM se aprecia mejor al observar el comportamiento de los residuales contra los valores predichos, principalmente, los que corresponden al ahusamiento (Figura 4), en los que además de tener una distribución que tiende a ser aleatoria alrededor de cero, la escala en la dispersión es menor, comparativamente, con los residuales del ajuste por NLS. Al respecto, Fang y Bailey (2001) indican que bajo el enfoque MEM es posible mejorar las características de los parámetros, al compensar por el efecto

Table 7 shows the simultaneous adjustment of the d-CV compatible system using MEM corrected for heteroskedasticity and autocorrelation (MEM-3) of the highest quality. The intervals for the parameters with fixed effects were narrow, which is indicative of a higher level of demand and a better quality; this evinces that the use of MEM is a favorable refinement in the system adjustment technique that allows making more accurate estimations and inferences of both the tapering and the commercial value.

The additional benefit of the adjustment using the MEM approach can be better appreciated when observing the behavior of the residuals versus that of the predicted values, especially in relation to tapering (Figure 4), in which not only does the distribution tend to be random and near zero, but also the scale in the dispersion is lower, comparatively, with the residuals of the adjustment using NLS. In this respect, Fang and Baily (2001) point out that, under the MEM approach, it is possible to improve the characteristics of the parameters

de variables tomadas en una misma unidad experimental. Este enfoque considera la correlación contemporánea, que ayuda a reducir, en forma considerable, el error estándar de los parámetros del modelo, y a que los valores por componente se unifiquen.

by compensating for the effect of variables measured in the same experimental unit. This approach takes into account the contemporary correlation, which helps reduce the standard errors of the model's parameters considerably and allows unifying the values by component.

Cuadro 7. Parámetros fijos estimados y bondad de ajuste del modelo 5 corregido por heterocedasticidad y autocorrelación (MEM-C).

Parámetro	Valores de los parámetros				Intervalo	
	Estimador	Error Estándar	Valor de t	Significancia	Inferior	Superior
a_0	0.0000427	0.00000464	9.20405	<0.0001	0.00003	0.00005
a_1	1.7339635	0.03700200	46.86135	<0.0001	1.66151	1.80642
a_2	1.2070785	0.04619426	26.13049	<0.0001	1.11662	1.29754
B_1	0.0000063	0.00000017	37.43700	<0.0001	0.00001	0.00001
B_2	0.0000268	0.00000032	83.98077	<0.0001	0.00003	0.00003
B_3	0.0000295	0.00000072	41.24572	<0.0001	0.00003	0.00003
p_1	0.0399814	0.00092905	43.03454	<0.0001	0.03816	0.04180
p_2	0.7499378	0.02591456	28.93886	<0.0001	0.69919	0.80068

Table 7. Fixed estimated parameters and goodness-of-fit of Model 5 corrected for heteroskedasticity and autocorrelation (MEM-C).

Parameter	Parameter values				Interval	
	Estimator	Standard Error	T value	Significance	Lower	Higher
a_0	0.0000427	0.00000464	9.20405	<0.0001	0.00003	0.00005
a_1	1.7339635	0.03700200	46.86135	<0.0001	1.66151	1.80642
a_2	1.2070785	0.04619426	26.13049	<0.0001	1.11662	1.29754
B_1	0.0000063	0.00000017	37.43700	<0.0001	0.00001	0.00001
B_2	0.0000268	0.00000032	83.98077	<0.0001	0.00003	0.00003
B_3	0.0000295	0.00000072	41.24572	<0.0001	0.00003	0.00003
p_1	0.0399814	0.00092905	43.03454	<0.0001	0.03816	0.04180
p_2	0.7499378	0.02591456	28.93886	<0.0001	0.69919	0.80068

Diéguez-Aranda *et al.* (2006) y Li y Weiskittel (2010) citan que el modelo segmentado de Fang *et al.* (2000) se comporta bien para estimar, tanto el volumen total como los diámetros a diferentes alturas en árboles de coníferas, con diferente tamaño en diámetro normal y altura total.

According to Diéguez-Aranda *et al.* (2006) and to Li and Weiskittel (2010), the behavior of the segmented model of Fang *et al.* (2000) is good for estimating both the total volume and the diameters at various heights in conifer trees with differently sized normal diameter and total height.



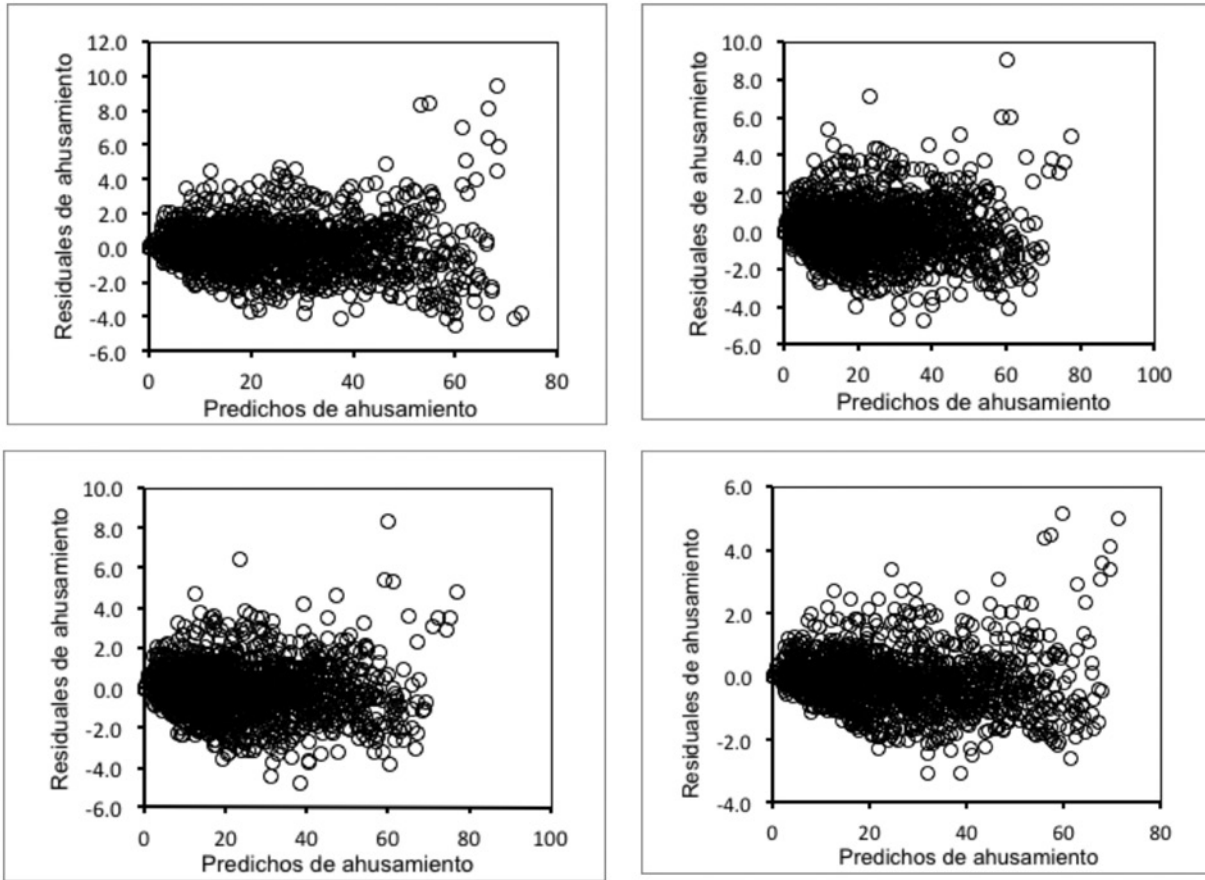


Figura 4. Comportamiento de residuales contra predichos para el ahusamiento en los diferentes ajustes: (a) NLS, (b) MEM sin corregir, (c) MEM corregido por heterocedasticidad y (d) MEM corregido por heterocedasticidad y por autocorrelación.

Figure 4. Behavior of residual versus predicted values for tapering in the various adjustments: (a) NLS, (b) uncorrected MEM, (c) MEM corrected for heteroskedasticity, and (d) MEM corrected for heteroskedasticity and for autocorrelation.

Sistema de cubicación para árboles de *Quercus* spp.

El sistema de cubicación a nivel de árbol individual (SCAI) para *Quercus* spp. quedó conformado por la expresión de ahusamiento d (modelo 5), por la función que estima el volumen comercial (V_c) propuesta por Fang *et al.* (2000), así como la expresión correspondiente para estimar la altura comercial (H_M) a un diámetro mínimo comercial (d), y la ecuación de volumen total (V). El SCAI se expresa en la forma que enseguida se indica.

$$d = c_1 \left[H \frac{k - B_1}{B_1} (1 - q) \frac{k - \beta}{\beta} \alpha_1^{l_1} \cdot \alpha_2^{l_2} \right]^{1/2}$$

$$V_c = c_1^2 H^{k\beta} [B_1 r_0 + (l_1 + l_2)(B_2 - B_1)r_1 + l_2(B_3 - B_2)\alpha_1 r_2 - \beta(1 - q)^{k/\beta} \alpha_1^{1-l_2} \alpha_2^{l_2}]$$

$$V_c = a_0 D^{a_1} H^{a_2}$$

Cubing system for *Quercus* spp. trees

The cubing system for individual trees (CSIT) for *Quercus* spp. consists of the taper expression d (model 5), of the function estimating the commercial volume (CV) proposed by Fang *et al.* (2000), as well as of the corresponding expression to estimate the commercial height (HM) at a minimum commercial diameter (d), and the total volume (V) equation. The CSIT is expressed as follows:

$$d = c_1 \left[H \frac{k - B_1}{B_1} (1 - q) \frac{k - \beta}{\beta} \alpha_1^{l_1} \cdot \alpha_2^{l_2} \right]^{1/2}$$

$$V_c = c_1^2 H^{k\beta} [B_1 r_0 + (l_1 + l_2)(B_2 - B_1)r_1 + l_2(B_3 - B_2)\alpha_1 r_2 - \beta(1 - q)^{k/\beta} \alpha_1^{1-l_2} \alpha_2^{l_2}]$$

$$V_c = a_0 D^{a_1} H^{a_2}$$

La ecuación de volumen total que corresponde al modelo de Schumacher-Hall, definida en función del diámetro normal y la altura total, facilita la construcción de una tabla de volumen fustal total. Por otro lado, con la combinación del resto de las ecuaciones puede estimarse el volumen comercial a un diámetro mínimo en punta del fuste, así como estimar la altura a la que se alcanza un determinado diámetro en función de los requerimientos de la industria y uso comercial.

Un comparativo entre el modelo de volumen total para *Quercus* spp. de Chihuahua, propuesto por Pompa-García y Solís-Moreno (2008) que derivaron de un modelo de ahusamiento y que corresponde al de factor de forma constante ($V=0.25226855D^2H$), contra el generado en el presente estudio de Schumacher-Hall ($V=0.0000427D^{1.7339635}H^{2.070785}$), obtenido con base en un modelo de ahusamiento, demuestra que el primero tiene la tendencia a realizar subestimaciones, en tanto que en el segundo con estimaciones de volumen total son más consistentes y cercanas a los volúmenes observados, lo que evidencia la utilidad y beneficio de generar modelos y sistemas de cubicación de este tipo, para regiones geográficas específicas en donde crecen y se desarrollan las especies maderables de interés comercial.

El SCAI generado cumple con la siguiente condición, si el diámetro mínimo es cero, entonces el volumen comercial es igual al volumen total, ya que la altura comercial es igual a la altura total. Así cuando un árbol de *Quercus*, cuyo D es de 29 cm y su H de 20 m, el sistema cubica un volumen total del fuste de 0.54 m³, el cual es cercano al observado de 0.539 m³; al considerar un diámetro mínimo comercial del fuste de 20 cm, se estima una HM de 7.91 m; el Vc correspondiente a esas especificaciones, y desde el tocón, es de 0.41 m³.

En la Figura 5, se muestra gráficamente, lo anterior, en ella se observa el funcionamiento del sistema para el cálculo de la altura comercial, bajo las distintas técnicas de ajuste utilizadas. Con los valores de los parámetros del SCAI es factible generar tablas de volumen por tipo de producto y, con ello, estimar tanto el volumen comercial, como su valor monetario en función del precio en el mercado.

The total volume equation corresponding to the model of Schumacher-Hall, defined in terms of the normal diameter and total height, facilitates the construction of a table for the total stem volume. On the other hand, with the combination of the rest of the equations, it is possible to estimate the commercial volume at a minimum diameter at the tip of the stem, as well as the height at which a particular diameter is attained according to the requirements of the industry and the commercial use.

A comparison between the model for estimating the total volume of *Quercus* spp. in Chihuahua proposed by Pompa-García and Solís-Moreno (2008) --derived by these from a taper model and consistently corresponding to the factor model ($V=0.25226855D^2H$)-- and the one generated in the present study by Schumacher Hall ($V=0.0000427D^{1.7339635}H^{2.070785}$), based on a taper model, proves that the former tends to produce underestimations, while the latter produces more consistent total volume estimates that are closer to the observed volumes; this shows the usefulness and benefit of generating this type of models and cubing systems for specific regions where the timber-yielding species of commercial interest grow and thrive.

The generated CSIT meets the following condition: if the minimum diameter is zero, then the commercial value is equal to the total value, as the commercial height equals the total height. Thus, for a *Quercus* tree with a D of 29 cm and a H of 20 m, the system cubes a total stem volume of 0.54 m³, which is close to the observed volume, of 0.539 m³. When a minimum commercial stem diameter of 20 cm is considered, a HM of 7.91 m is estimated; the CV corresponding to these specifications, and from the stump up, is 0.41 m³.

Figure 5 shows the above data in a graphic form, as well as the functioning of the system for the estimation of the commercial height with the various utilized adjustment techniques. Based on the values of the CSIT parameters, it is possible to generate volume tables by product type and, thus, to estimate both the commercial volume and its monetary value in terms of the market price.



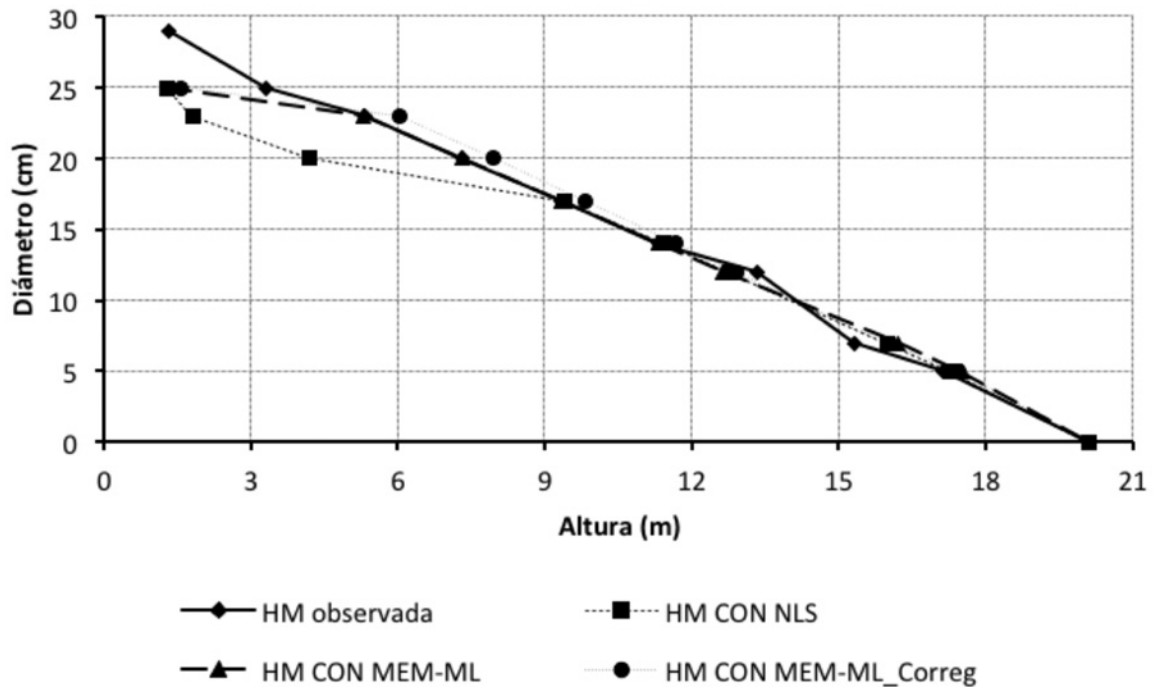


Figura 5. Comparativo del SCAI generado al estimar la altura comercial bajo los diferentes ajustes evaluados del sistema compatible.

Figure 5. Comparison of the CSIT generated by estimating the commercial height under the various evaluated adjustments of the compatible system.

Conclusiones

De las seis funciones de ahusamiento evaluadas, el modelo de Fang *et al.* (2000) tiene un comportamiento superior, ya que describe mejor los datos utilizados en el ajuste; por tanto, se recomienda como el mejor para describir el perfil diamétrico del fuste y para cubicar árboles individuales de *Quercus* spp. de bosques bajo manejo en el estado de Puebla. Este modelo, junto con su respectiva función de volumen comercial y total conforma un sistema de cubicación a nivel de árbol individual (SCAI) para el género.

La estrategia de ajuste con la técnica de modelo de efectos mixtos es superior a la de mínimos cuadrados ordinarios, puesto que ofrece estimaciones más precisas y consistentes en el cálculo del volumen comercial y total, así como de diámetros mínimos comerciales a diferentes alturas y viceversa.

El sistema de cubicación generado constituye una herramienta fundamental para su aplicación en los inventarios forestales en las Umafores y región de estudio, son útiles para hacer valoraciones económicas de rodales, además sirve como apoyo para la planificación del destino de los fustes aprovechados, en función de los requerimientos de la industria.

Conclusions

For the six assessed taper functions, the model of Fang *et al.* (2000) has a superior performance, as it best describes the data used in the adjustment; therefore, it is recommended as the best model to describe the stem diameter profile and for cubing individual *Quercus* spp. trees in forests under management in the state of *Puebla*. This model, along with its respective commercial and total volume functions, constitutes a cubing system for individual trees (CSIT) of this genus.

The adjustment strategy with the mixed effect model technique is superior to that of ordinary minimum squares, as it provides more accurate and consistent estimations in the calculation of the commercial and total volume, as well as of the minimum commercial diameters at various heights, and vice versa.

The cubing system that was made is a basic tool to apply it in the forest inventories in the Umafores and the study region; they are useful for economic stand assessments, and as a support for planning the final use of the harvested stems, according to industrial requirements.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

Contribución por autor

Juan Carlos Tamarit Urías: análisis estadístico de la información y elaboración del manuscrito; Elba Rojas Díaz: colaboración en la elaboración del manuscrito en los apartados esenciales; Gerónimo Quiñonez Barraza: análisis estadístico de la información y apoyo en la parte de Resultados y Discusión; Casimiro Ordoñez Prado: conformación y arreglo de bases de datos para su análisis estadístico; José Carlos Monárrez González: definición de tamaño de muestra, coordinación para la realización de la etapa de trabajo de campo y de la colecta de la información.

Referencias

- Budhathoki, C. B. 2006. Mixed-effects modeling of shortleaf pine (*Pinus echinata* Mill.) growth data. Thesis for doctor of philosophy. Oklahoma State University, Stillwater, OK, USA. 168 p.
- Cao, Q., V., H. E. Burkhart and T. A. Max. 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science* 26(1): 71-80.
- Corral-Rivas, J. J., U. Diéguez-Aranda, S. Corral Rivas and F. Castedo-Dorado. 2007. A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (Mexico). *Forest Ecology Management* 238: 118-129.
- De los Santos-Posadas, H., M. Montero-Mata y M. Kanninen. 2006. Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel.) Exell en Costa Rica. *Agrociencia* 40: 521-532.
- Diéguez-Aranda, U., F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez G. and A. Rojo. 2006. Compatible taper function for Scots pine plantations in northwestern Spain. *Canadian Journal Forest Research* 36(5): 1190-1205.
- Diéguez-Aranda, U., A. Rojo A., F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez G., M. Barrio-Anta, F. Crecente-Campo, J. M. González G., C. Pérez-Cruzado, R. Rodríguez S., C. A. López-Sánchez, M. Á. Balboa-Murias, J. J. Gorgoso V. y F. Sánchez R. 2009. Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Universidad de Santiago de Compostela. Galicia, España. 259 p.
- Fang, Z., B. E. Borders and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science* 46(1): 1-12.
- Fang, Z. and R. L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *Forest Science* 47(3): 287-300.
- Hall, D. B. and J. L. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60(1): 16-24.
- Hernández P., D., H. M. De los Santos P., G. Ángeles P., J. R. Valdez L. y V. H. Volke H. 2013. Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schltdl. et Cham. en Zaualtipán, Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 4(16): 35-45.
- Kozak, A. 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variables exponent taper functions. *Canadian Journal Forest Research* 27: 619-629.
- Li, R. and A. R. Weiskittel. 2010. Comparison of model forms for estimating for stem taper and volume in the primary conifer species of the North American Acadian Region. *Annals of Forest Science* 67(3): 302.
- Max, T. A. and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science* 22(3): 283-289.
- Myers, R. H. 1990. Classical and modern regression with applications. 2nd ed. Duxbury Press, Belmont, CA, USA. 488 p.
- Parresol, B., J. Hotvedt and Q. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Canadian Journal Forest Research* 17(3): 250-259.
- Pompa-García, M. y R. Solís-Moreno. 2008. Ecuación de volumen para el género *Quercus* en la región noroeste de Chihuahua, México. *Quebracho* 16: 84-93.

Conflicts of interests

The authors declare no conflict of interest.

Contribution by author

Juan Carlos Tamarit Urías: statistical analysis of information and preparation of the manuscript; Elba Rojas Díaz: support in writing of the manuscript in its essential components; Gerónimo Quiñonez Barraza: statistical analysis of information and support in regard to Results and Discussion; Casimiro Ordoñez Prado: elaboration of data bases for their statistical analysis; José Carlos Monárrez González: calculation of sample size, coordination of field work and information data collection.

End of the English version

- Pompa-García, M., J. J. Corral-Rivas, J. C. Hernández-Díaz and J. G. Álvarez-González. 2009. A system for calculating the merchantable volume of oak trees in the northwest of the state of Chihuahua, Mexico. *Journal of Forestry Research* 20(4): 293-300.
- Quiñonez-Barraza, G., H. M. De los Santos-Posadas, J. G. Álvarez-González y A. Velázquez-Martínez. 2014. Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para las principales especies de *Pinus* en Durango, México. *Agrociencia* 48: 553-567.
- R Development Core Team. 2009. R: a language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. URL: <http://www.R-project.org> (24 de abril de 2015).
- Sakici, O. E., N. Misira, H. Yavuz, H. Misira. 2008. Stem taper functions for *Abies nordmanniana* subsp. *bornmulleriana* in Turkey. *Scandinavian Journal of Forest Research* 23(6): 522-533.
- Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (SARH). 1978. Inventario forestal del estado de Puebla. Subsecretaría Forestal y de la Fauna. Dirección General del Inventario Forestal. Núm. 44. México, D. F., México. 50 p.
- Statistical Analysis System (SAS). 2008. SAS/STAT® 9.2 User's Guide. SAS Institute Inc. Raleigh, NC, USA. n/p.
- Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat). 2014. Anuario Estadístico de la Producción Forestal 2013. México, D. F., México. 230 p.
- Tamarit U., J. C., H. M. De los Santos P., A. Aldrete, J. R. Valdéz L., H. Ramírez M. y V. Guerra de la C. 2014. Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* L f. mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 5(21): 58-74.
- Valencia A., S. 2004. Diversidad del género *Quercus* (Fagaceae) en México. *Boletín de la Sociedad Botánica de México* 75: 33-53.
- Vargas-Larreta B. y J. J. Corral-Rivas. 2013. Validación y calibración del sistema biométrico utilizado en la elaboración de programas de manejo forestal maderable en la UMAFOR 0808 "Guadalupe y Calvo", Chihuahua. Comisión Nacional Forestal. San Juan de Ocotán, Jal., México. Informe técnico. 50 p.
- Zepeda B., E. M. y A. Domínguez P. 1997. Ecuaciones de ahusamiento para tres especies de pino, del ejido El Largo, Chihuahua. In: Memoria de resúmenes de ponencias. III Congreso Mexicano sobre Recursos Forestales. Linares, NL, México. 43 p.
- Zhang, Y., B. E. Borders and R. L. Bailey. 2002. Derivation, fitting, and implication of a compatible stem taper-volume-weight system for intensively managed, fast growing loblolly pine. *Forest Science* 48(3): 595-607.
- Zimmerman, D. L. and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modelling of growth curve data: an overview (with discussion). *Test* 10(1): 1-73.