



ARTÍCULO / ARTICLE

SISTEMA DE CUBICACIÓN PARA ÁRBOLES INDIVIDUALES DE *Tectona grandis* L. f. MEDIANTE FUNCIONES COMPATIBLES DE AHUSAMIENTO-VOLUMEN

VOLUME ESTIMATION SYSTEM FOR INDIVIDUAL *Tectona grandis* L. f. TREES THROUGH COMPATIBLE TAPER/VOLUME FUNCTIONS

Juan Carlos Tamarit Urías¹, Héctor M. De los Santos Posadas², Arnulfo Aldrete², J. René Valdez Lazalde², Hugo Ramírez Maldonado³ y Vidal Guerra De la Cruz⁴

RESUMEN

Se construyó un sistema de cubicación de árbol individual generado a partir de una función segmentada de ahusamiento para plantaciones de *Tectona grandis* establecidas en Campeche, Tabasco y Chiapas. Se cubicaron 144 árboles de diferentes edades; para cada uno se midió el diámetro con corteza y la altura sobre el fuste a 1 m después del tocón hasta la altura total. Se evaluó el ajuste estadístico de seis funciones segmentadas de ahusamiento y se seleccionó al modelo de Fang como el mejor por presentar la mayor precisión, el menor sesgo y por describir el ahusamiento del fuste correctamente. De forma simultánea se le hizo un ajuste con su respectiva función de volumen comercial basado en la técnica de modelo de efectos mixtos, con lo que se logró controlar la variación específica a nivel de árbol, mejorar la estimación de los parámetros y la precisión de las predicciones. Los resultados indican que el sistema de cubicación derivado se conforma de ecuaciones que describen con exactitud el perfil fustal y estiman el volumen comercial y total, así como la altura comercial a un diámetro mínimo y viceversa. Los puntos de cambio en la forma dendrométrica del fuste son similares a los de otras especies de árboles latifoliados. El equivalente al factor de forma que procede del modelo de volumen total fue de 0.43 en promedio y permite realizar estimaciones muy cercanas a los volúmenes observados; comparativamente es inferior al calculado para esta especie en otras regiones tropicales.

Palabras clave: Altura comercial, diámetro mínimo, modelos segmentados de ahusamiento, *Tectona grandis* L. f., volumen total, volumen comercial.

ABSTRACT

A volume estimation system for individual trees was generated based on a segmented taper function for *Tectona grandis* plantations established in Campeche, Tabasco and Chiapas. The volume of 144 trees of different ages was estimated; for each, the diameter with bark was measured, as was the height above the stem base from 1 m above the stump to the total height. The statistical adjustment of six segmented taper functions was assessed, and the model of Fang was selected as the best, since it is the most accurate, the one with least bias and provides a correct description of the stem taper. An adjustment was simultaneously made with its respective merchantable volume function based on the mixed effect model technique, whereby the specific variation was controlled at tree level, and the estimation of the parameters and the accuracy of the predictions were improved. The results indicate that the derived volume estimation system consists of equations that accurately describe the stem profile and estimate the merchantable and total volumes, as well as the merchantable length at a minimum diameter and vice versa. The points of change in the dendrometric stem shape are similar to those of other broadleaf tree species. The equivalent of the shape factor from the total volume model was 0.43 in average, which allows estimations that are very close to the observed volumes and is comparatively lower than that estimated total volume for this species in other tropical regions.

Key words: Merchantable height, minimum diameter, segmented taper models, *Tectona grandis* L. f., merchantable volume, total volume.

Fecha de recepción/date of receipt: 8 de septiembre de 2012; Fecha de aceptación/date of acceptance: 22 de mayo de 2013.

¹ Campo Experimental San Martinito. CIR-Golfo Centro. INIFAP. Correo-e: tamarit.juan@inifap.gob.mx

² Programa Forestal. Colegio de Postgraduados.

³ División de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma Chapingo.

⁴ Sitio Experimental Tlaxcala. CIR-Centro. INIFAP.

INTRODUCCIÓN

La teca (*Tectona grandis* L. f.) es una especie arbórea de rápido crecimiento. A partir del alto valor económico de su madera, se le ha incorporado como integrante de diversas plantaciones forestales comerciales (PFC) establecidas sobre grandes extensiones en México durante los últimos años, principalmente en el sureste del país. La superficie plantada para 2012 era de 221 000 hectáreas, la teca cubría alrededor de 10 %, lo que la define como la cuarta en importancia (Conafor, 2012). Pese al esfuerzo técnico y de inversión ejercidos por el gobierno federal y la iniciativa privada para el establecimiento de PFC con esta opción, hace falta realizar estudios enfocados a generar instrumentos técnicos que sean de utilidad práctica y operativa para su evaluación.

Una de las necesidades primarias, en todo proyecto de inversión en PFC, es contar con un sistema que haga posible la cubicación precisa del volumen total y comercial de los árboles individuales en pie. Pérez y Kanninen (2003) generaron ecuaciones para estimar el volumen total del árbol para plantaciones de teca en regiones bajo condiciones edáficas, climáticas y silvícolas diferentes a las prevalentes en el sureste mexicano; por ello es necesario desarrollar un sistema particular para este taxón orientado a la determinación de ambos tipos de volumen ante el incremento de espacios que lo incluyen en la actualidad.

Tradicionalmente se calcula el volumen total de árboles individuales mediante un modelo que considera el diámetro normal y la altura total. No obstante, en especies de alto valor maderable es más útil y relevante conocer su correspondiente distribución de productos según el uso industrial y comercial, pues con ello se está en la posibilidad de efectuar una mejor valoración de la PFC (Adu-Bredu *et al.*, 2008). Para tal propósito, se recurre a funciones de ahusamiento que describan con precisión el perfil diamétrico del fuste y facilitan el cálculo de la distribución de productos a cualquier límite en diámetro o altura comercial (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). Un modelo de ese tipo debe estimar la altura sobre el fuste a un determinado diámetro mínimo o viceversa y con ello el volumen respectivo. El resultado es una tabla de cubicación por producto, lo que la convierte en un valioso instrumento técnico de apoyo para el manejo del recurso forestal con fines maderables (Sakici *et al.*, 2008).

Entre las funciones de ahusamiento destacan las de exponente variable y los modelos segmentados por su proceso de construcción y precisión. En la derivación de ambos se toman en cuenta los cuerpos dendrométricos del árbol: neiloide en la parte basal, cilindro o paraboloides en la sección central y cono en la porción superior. En los modelos segmentados, cada sección se une imponiendo condiciones de continuidad de la curva, con lo que se tienen puntos de unión en las diferentes formas que componen al fuste del árbol (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). Estos tienen ventaja sobre los de exponente variable, ya que se

INTRODUCTION

Teak (*Tectona grandis* L. f.) is a rapidly growing tree species. Based on the high economic value of its wood, it has been incorporated as part of various commercial forest plantations (CFP) established in recent years on large extensions in Mexico, particularly in the south-east of the country. Teak covered 10 % of the surface planted in the year 2012 –221 000 hectares–, a fact that defines it as the fourth species in importance (Conafor, 2012). Although the federal government and the private initiative have made technical efforts and investments to establish CFPs with this option, studies focusing on the generation of technical instruments of practical and operative utility for its evaluation are still required.

One of the primary needs of every project for investment in CFPs is to have a system that enables the precise estimation of the total and merchantable volume of the individual standing trees. Pérez and Kanninen (2003) generated equations to estimate the total volume of the trees for teak plantations in regions with low edaphic, climatic and silvicultural conditions that are different from those prevailing in the Mexican south-east; it is therefore necessary to develop a particular system for this taxon, oriented to determine both types of volume in the face of the increase of surfaces which include it today.

The total volume of individual trees is traditionally estimated using a model that takes into account the normal diameter and the total height. Nevertheless, in species with a high timber value, it is more helpful and relevant to know the distribution of their products according to their industrial and commercial use, for this will allow a better assessment of the CFP (Adu-Bredu *et al.*, 2008). For this purpose, taper functions are used which provide an accurate description of the diametric profile of the stem and facilitate the estimation of the product distribution at any limit for merchantable diameter or length (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). This type of model must estimate the height above the stem base at a certain minimum diameter or vice versa and, thereby, the respective volume. The result of practical utility is a tree volume table by product, which is a valuable technical support instrument for the management of the forest resource for timbering purposes (Sakici *et al.*, 2008).

Among the taper functions, those of variable exponent and segmented models stand out for their construction process and precision. In the derivation of both, the dendrometric bodies of the tree are taken into account: neiloid in the basal part, cylinder or paraboloid in the central section, and cone in the upper portion. In the segmented models, each section is attached imposing curve continuity conditions that result in points of inflexion between the different forms that make up the tree stem (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). These have an advantage over variable exponent models in that they integrate analytically in order to estimate the merchantable and total volumes, which

integran en forma analítica para estimar el volumen comercial y total, de lo que resulta una ventaja adicional: la de conformar un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial; puesto que al compartir los mismos parámetros pueden ajustarse en el proceso de regresión de manera simultánea.

El objetivo del presente trabajo fue construir un sistema de cubicación de árbol individual para plantaciones de teca en el sureste mexicano, integrado por modelos de volumen total y comercial variable generados a partir de funciones segmentadas de ahusamiento. El desarrollo del sistema parte de información dasométrica específica de tales plantaciones para conformar una herramienta de utilidad práctica para los tomadores de decisiones encargados de su manejo, que les facilite determinar la producción y volumen maderable de manera más precisa.

MATERIALES Y MÉTODOS

La muestra analizada estuvo integrada por 144 árboles obtenidos de plantaciones ubicadas en Campeche, Tabasco y Chiapas. Cada árbol se derribó y troceó; asimismo se efectuaron mediciones de diámetros con corteza (d) y alturas (HM) tomadas a cada 30 cm en individuos maduros (edad promedio de 230 meses) y cada metro en ejemplares jóvenes (edad promedio de 80 meses), a partir de una altura inicial que corresponde al tocón (hb) hasta la altura total (H), además del diámetro normal (D). En total se tuvieron 2 648 pares de observaciones diámetro-altura distribuidas a lo largo de los fustes. En el Cuadro 1 se presentan las estadísticas básicas descriptivas de las variables analizadas. La cubicación de las trozas se realizó usando la fórmula de Newton y el método del centroide (Wiant *et al.*, 1992), para la punta del fuste se usó la fórmula del cono. El volumen total del fuste por individuo se determinó mediante el método de trozas traslapadas, con base en Bailey (1995). Previo a su procesamiento, la información de las variables del ahusamiento y del volumen acumulado por árbol muestreado se graficó, situación que permitió auditar, corregir y depurar la base de datos seminal para obtener los comportamientos y tendencias lógicas que se observan en la Figura 1a y 1b.

Los modelos que se consignan en el Cuadro 2, conformaron el grupo de funciones segmentadas de ahusamiento compatibles con el volumen comercial, mismas que se probaron y evaluaron para describir el perfil fustal de los árboles de teca.

allows forming a compatible taper and merchantable volume system, since they share the same parameters and can therefore be simultaneously adjusted in the regression process.

The purpose of this research was to build an individual tree volume estimation system for teak plantations in the Mexican south-east, consisting of variable merchantable and total volume models generated from segmented taper functions. The point of departure for the development of the system is the specific dasometric information of these plantations to make up a tool with a practical utility for the decision makers in charge of their management that may facilitate a more accurate determination of the timber production and timber volume.

MATERIALS AND METHODS

The analyzed sample consisted of 144 trees obtained from plantations in Campeche, Tabasco and Chiapas. Each tree was felled and chopped up; at the same time, measurements of height (HM) and of the diameters with bark (d) were made at every 30 cm in mature trees (with an average age of 230 months) and at every meter in young trees (with an average age of 80 months), from an initial height corresponding to the stump height (hb) up to the total height (H), besides the normal diameter (D), obtaining a total of 2 648 pairs of diameter-height observations distributed along the stems. Table 1 shows the basic descriptive statistics of the analyzed variables. The estimation of the volume of the logs was made using Newton's formula and the centroid method (Wiant *et al.*, 1992); the cone formula was used for the tip of the stem. The total volume of the stem for each individual was determined using the method of overlapping logs, based on Bailey (1995). Before processing, the information of the taper variables and of the accumulated volume for each sampled tree, a situation that made it possible to audit, edit and clear the seminal database in order to determine the behaviors and logical trends that may be observed in Figures 1a and 1b.

The models recorded in Table 2 constituted the group of segmented taper functions compatible with the merchantable volume, which were tested and evaluated in order to describe the stem profile of the teak trees.

The statistical adjustment of the segmented taper models was made for maximum likelihood, with the MODEL procedure of the SAS/ETS® statistical package (SAS, 2008). The evaluation and selection of the best model was carried out using the determination coefficient corrected for the number of parameters (R^2_{adj}), the bias, the root of the mean square error (RMSE) and Akaike information criterion (AIC), estimated as follows:



Cuadro 1. Estadísticos de las variables medidas en la muestra de árboles.

Variable	Máximo	Medio	Mínimo	D.E. ¹
Diámetro normal D con corteza (cm)	44.17	25.46	6.50	10.43
Altura total H del árbol (m)	25.00	18.05	7.75	5.39
Altura HM de la sección a partir del tocón (m)	25.00	7.73	0.02	5.92
Diámetro d con corteza a la altura HM (cm)	57.5	16.45	0.00	10.77
Edad (meses)	240	116.79	44	66.09

¹Desviación estándar

Table 1. Statistics of the variables measured in the tree sample.

Variable	Maximum	Medium	Minimum	SD. ¹
Normal diameter D with bark (cm)	44.17	25.46	6.50	10.43
Total tree height H (m)	25.00	18.05	7.75	5.39
HM height of the section from the stump (m)	25.00	7.73	0.02	5.92
Diameter d with bark at HM height (cm)	57.5	16.45	0.00	10.77
Age (months)	240	116.79	44	66.09

¹Standard deviation

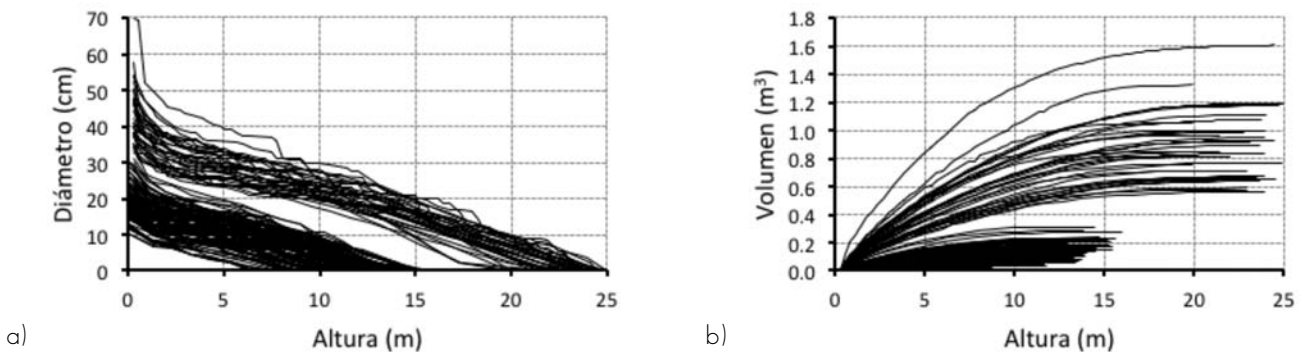


Figura 1. Comportamiento del diámetro (a) y del volumen acumulado con respecto a la altura sobre el fuste (b).
Figure 1. Behavior of the diameter (a) and of the accumulated volume with respect to the height above the stem base (b).

El ajuste estadístico de los modelos segmentados de ahusamiento se efectuó por máxima verosimilitud, con el procedimiento MODEL del paquete estadístico SAS/ETS® (*Statistical Analysis System*, 2008). La evaluación y selección del mejor se realizó utilizando el coeficiente de determinación corregido por el número de parámetros (R^2_{adj}), el sesgo, la raíz del error cuadrático medio (RECM) y el criterio de información de Akaike (AIC), estimados de la siguiente forma:

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n-1}{n-p} \right) \quad \text{siendo } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\text{Sesgo} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{n} \quad \text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}}$$

$$\text{AIC} = 2p + n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right)$$

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n-1}{n-p} \right) \quad \text{siendo } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\text{Sesgo} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{n} \quad \text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}}$$

$$\text{AIC} = 2p + n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right)$$

Where:

$\hat{Y}_i, Y_i, \bar{Y}_i$ = Estimated values, observed values and taper averages (d)

n = Total number of observations used in the adjustment of the models

p = Number of model parameters to be estimated

Donde:

$\hat{Y}_i, Y_i, \bar{Y}_i$ Valores estimados, observados y promedios del ahusamiento (d)

n = Número total de observaciones usadas en el ajuste de los modelos

p = Número de parámetros del modelo por estimar



With the purpose of facilitating the selection of the best model, besides the above statistics of goodness of fit, the sum of square errors (SSE), the mean square of the error, the likelihood value (loglik), and a scoring criterion was generated, which, according to Sakici et al. (2008), consisted in hierarchizing the statistics for each model by assigning consecutive values of 1 to 6 by order of importance (1 for the best statistical value and 6 for the poorest). Subsequently, the summation of the values make up the total score of each model. Based on comparison, the best were identified and they were those that corresponded with the lowest value in the total score.

Cuadro 2. Modelos segmentados de ahusamiento evaluados para elaborar el sistema de cubicación de árboles provenientes de plantaciones de teca en el sureste de México.

Table 2. Segmented taper models evaluated in order to develop the system for the estimation of volume of trees from teak plantations in southeastern Mexico.

Modelo	Función
1 Zhang et al. (2002)	$d = DH' (k_1 - B_1) / 2B_1 [\alpha_1^l (1 - q) (k_1 - B_1)^{1-l_1} B_2^{l_1} / (B_1)^{1-l_1} B_2^{l_1}]^{1/2}$ $I_1 = 1 \text{ si } q > p_1 \text{ y } 0 \text{ si } q \leq p_1$
2 Parresol et al. (1987)	$d = D [z^2(B_1 + B_2z) + (z - p_1)^2 (B_3 + B_4(z + 2p_1))]^{1/2}$ $I_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; 0 \text{ de otra forma}$
3 Fang et al. (2000)	$d = c_1 \left[H \frac{k - B_1}{B_1} (1 - q) \frac{k - \beta}{\beta} \alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \right]^{1/2}$ $I_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; 0 \text{ de otra forma}$ $I_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; 0 \text{ de otra forma}$
4 Max y Burkhart (1976)	$d = D[B_1(q - 1) + B_2(q^2 - 1) + B_3(p_1 - q)^2 I_1 + B_4(p_2 - q)^2 I_2]^{1/2}$ $I_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; 0 \text{ de otra forma}$ $I_2 = 1 \text{ si } q \leq p_2; 0 \text{ de otra forma}$
5 Cao et al. (1980)	$d = D \frac{c_0}{k} [2z + B_1(3z^2 - 2z) + B_2(z - p_1)^2 I_1 + B_3(z - p_2)^2 I_2]^{1/2}$ $I_1 = 1 \text{ si } z \geq p_1; 0 \text{ de otra forma}$ $I_2 = 1 \text{ si } z \geq p_2; 0 \text{ de otra forma}$
6 Zepeda y Domínguez (1997)	$d = D[B_1X + B_2X^2] + B_3(p_1 - X)I_1 + B_4(p_2 - X)^2 I_2$ $I_1 = 1 \text{ si } X \geq p_1; 0 \text{ de otra forma}$ $I_2 = 1 \text{ si } X \geq p_2; 0 \text{ de otra forma}$

Donde:

$$\alpha = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1) / B_1 B_2}, H' = H / (H - 1.3), k = \pi / 40000, k_1 = \pi / 8$$

$$q = HM / H, r_0 = (1 - hb / H)^{k/B_1}, r_1 = (1 - p_1)^{k/B_1}, r_2 = (1 - p_2)^{k/B_2}$$

$$X = (M - HM) / (H - 1.3), z = (H - HM) / H$$

$$c_1 = \left(\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \frac{K}{B_1} / B_1 (r_0 - r_1) + B_2 (r_1 - \alpha_1 r_2) + B_3 \alpha_1 r_2 \right)^{1/2}$$

$$\alpha_1 = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1) / B_1 B_2}, \alpha_2 = (1 - p_2)^{k(B_3 - B_2) / B_2 B_3}, \beta = B_1^{1 - (l_1 + l_2)} B_2^{l_1} B_3^{l_2}$$

$\alpha_0, \alpha_2, B_1, B_4, c_0, p_1, p_2$ son parámetros por estimar.

l_1, l_2 son variables indicadoras sobre el cambio de cuerpo dendrométrico del fuste.

Where:

$$\alpha = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1) / B_1 B_2}, H' = H / (H - 1.3), k = \pi / 40000, k_1 = \pi / 8$$

$$q = HM / H, r_0 = (1 - hb / H)^{k/B_1}, r_1 = (1 - p_1)^{k/B_1}, r_2 = (1 - p_2)^{k/B_2}$$

$$X = (M - HM) / (H - 1.3), z = (H - HM) / H$$

$$c_1 = \left(\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} - \frac{K}{B_1} / B_1 (r_0 - r_1) + B_2 (r_1 - \alpha_1 r_2) + B_3 \alpha_1 r_2 \right)^{1/2}$$

$$\alpha_1 = (1 - p_1)^{k(B_2 - B_1) / B_1 B_2}, \alpha_2 = (1 - p_2)^{k(B_3 - B_2) / B_2 B_3}, \beta = B_1^{1 - (l_1 + l_2)} B_2^{l_1} B_3^{l_2}$$

$\alpha_0, \alpha_2, B_1, B_4, c_0, p_1, p_2$ are parameters to be estimated.

l_1, l_2 are variables indicating the change of dendrometric body of the stem.

Con el propósito de facilitar la selección del mejor modelo, además de los anteriores estadísticos de bondad de ajuste, se consideró la suma de cuadrados del error (SCE), el cuadrado medio del error (CME), el valor de verosimilitud (logLik), y se generó un criterio de calificación que de acuerdo con Sakici et al. (2008) consistió en jerarquizar los estadísticos de cada modelo, mediante la asignación de valores consecutivos del 1 al 6 en función al orden de importancia (1 al mejor valor del estadístico y 6 al valor más pobre), posteriormente, la sumatoria de los valores conformó la calificación total de cada modelo, por comparación se identificaron los mejores, que correspondieron aquellos con el menor valor en la calificación total.

Una vez seleccionado el mejor modelo de ahusamiento, por la compatibilidad que existe entre la función de ahusamiento con su respectiva expresión de volumen comercial, pues comparten los mismos parámetros, se procedió ajustar de manera simultánea los de ahusamiento y de volumen.

Para ello y con fines comparativos, se probaron dos técnicas: primero se efectuó el ajuste simultáneo por mínimos cuadrados no lineales (NLS) y después el mismo sistema se ajustó mediante el enfoque de modelo de efectos mixtos (MEM). Previamente, se conformó la base de datos como una estructura bi-variada que permite incluir efectos aleatorios MEM (Pinheiro y Bates,

Once the best taper model has been selected based on the compatibility existing between the taper function and its respective expression of merchantable volume because they share the same parameters, the taper and volume parameters were simultaneously adjusted.

To this end and for purposes of comparison, two techniques were tested: first, the simultaneous adjustment was carried out with non-linear minimum squares (NLS) and subsequently the same system was adjusted with the mixed effect model (MEM) approach. The database was previously formed as a bivariate structure that allows the inclusion of random MEM effects (Pinheiro and Bates, 2000; Hall and Clutter, 2004), which led to a system expressed in model 7. Both adjustments were made with the R Statistical Programming Language 2.14.0 (<http://www-project.org>, R Development Core Team, 2009); and the [R] NLME package with maximum likelihood was used for the MEM.

$$\begin{pmatrix} d_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D, H, hb, HM; p) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(K, D, H, hb, HM; p) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e_i \quad (7)$$

Where:

d_i = Observation vector for tapering in the i^{th} tree

2000; Hall y Clutter, 2004), lo que llevó a tener un sistema expresado en el modelo 7. Ambos ajustes se hicieron con el programa estadístico R versión 2.14.0 (<http://www.r-project.org>, R Development Core Team, 2009), para el MEM se empleó el paquete NLME de R con máxima verosimilitud.

$$\begin{pmatrix} d_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D, H, hb, HM; \rho) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(K, D, H, hb, HM; \rho) \end{pmatrix} + e_i \quad (7)$$

Donde:

- d_i = Vector de observaciones de ahusamiento en el i -ésimo árbol
- V_i = Vector de observaciones de volumen comercial en el i -ésimo árbol
- $f(\dots)$ = Define la estructura del modelo de ahusamiento
- $g(\dots)$ = Define al modelo de volumen comercial
- ρ = Vector de parámetros por estimar del sistema, que al especificar el efecto aleatorio queda expresado como:

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

- B_i = Parámetro con efecto mixto, y se expresa como $B_i + b_{ij}$
- b_{ij} = Parámetro con efecto aleatorio

Los efectos aleatorios del modelo se definen como $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ y $b_i \sim N(0, \phi^2)$. Los datos de tipo longitudinal son irregularmente espaciados y no balanceados en esta clase de estudios; en el ajuste simultáneo del sistema mediante MEM con los comandos apropiados del paquete NLME de R, se realizó la corrección por heterocedasticidad y enseguida por autocorrelación, con lo que se ejecutan de manera sólida las pruebas de hipótesis habituales sobre los parámetros, además de estimar intervalos de confianza más realistas (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001).

La corrección por heterocedasticidad se efectuó con un modelo y una ponderación de la varianza de los errores por medio de la función exponencial (e); el factor de ponderación fue sobre HM solo para el ahusamiento (d_i) y con el volumen comercial constante (V_i), la función quedó estructurada como:

V_i = Observation for merchantable volume in the i^{th} tree

$f(\dots)$ = Defines the structure of the taper model

$g(\dots)$ = Defines the model for merchantable volume

ρ = Vector of system parameters to be estimated, which, when specifying the random effect, is expressed as follows:

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Where:

- B_i = Mixed effect parameter, expressed as $B_i + b_{ij}$
- b_{ij} = Random effect parameter

The model's random effects are defined as $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ y $b_i \sim N(0, \phi^2)$. The longitudinal data are irregularly spaced and unbalanced in this type of studies; in the simultaneous adjustment of the system carried out with MEM, using the appropriate commands of the [R] NLME package, the correction was made for heteroskedasticity, and subsequently, for self-correlation. This allowed stronger testing of the usual hypotheses about parameters and a more realistic estimation of confidence intervals (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001).

The correction for heteroskedasticity was made using a model and an error variance weighting with an exponential function (e); the weighting factor was based on the HM exclusively for tree taper (d) with a constant merchantable volume (V). The function was structured as follows:

$$w(HM, d_i, V_i, \phi) = e^{\phi(HM \cdot (1-f) + f)}$$

Where ϕ was the parameter to be estimated, and f , an indicator variable that takes on the value of 1 for taper and of 0 for merchantable volume

The correction for self-correlation was made using error term modeling (e_{ij}) with a continuous first-order auto-regressive structure (AR(1)), expressed as follows:

$$e_{ij} = \psi_1 \rho_1^{tj-tj-1} e_{ij-1} + \epsilon_{ij}$$

Where:

- e_{ij} = i^{th} ordinary residue in the i^{th} tree
- $\Psi_j = 1$ for $j > k$ and zero for $j = 1$

$$w(HM, di, Vi, \phi) = e^{\phi(HM \cdot (1-f) \cdot f)}$$

En la que ϕ fue el parámetro por estimarse y f una variable indicadora que toma el valor de 1 para el ahusamiento y 0 para el volumen comercial.

La corrección por autocorrelación se hizo por el modelado del término de error (e_{ij}) con una estructura continua autorregresiva de primer orden (AR(1)), la cual quedó expresada como:

$$e_{ij} = \psi_1 \rho_1^{|j-i|-1} e_{ij-1} + \varepsilon_{ij}$$

Donde:

- e_{ij} = j -ésimo residuo ordinario en el i -ésimo árbol
- $\psi_j = 1$ para $j > k$ y cero para $j = 1$
- ρ_1 = Parámetro autorregresivo de orden 1 por ser estimado
- $t_{ij} - t_{i,j-1}$ = Distancia que separa las observaciones j y $j-1$ dentro de cada árbol
- ε_{ij} = Término del error bajo la condición de independencia

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el Cuadro 3 se reúnen los valores de los parámetros de los modelos ajustados; todos resultaron significativos con nivel de confiabilidad de 95 %, excepto el parámetro B_2 para el modelo 6 que fue no significativo. Los modelos 3 y 4 estiman el primer punto de inflexión en el que ocurre el cambio de neiloide a paraboloides a 7 % de la altura total; en tanto que, el segundo punto de inflexión en el que sucede el cambio de paraboloides a cono lo estiman a 58 % y 68 %, respectivamente.

Cuadro 3. Valores de los parámetros de los modelos segmentados para ahusamiento probados para describir el perfil diamétrico de árboles de *Tectona grandis* L. f.

Table 3. Values of the parameters of the segmented taper models tested in order to describe the diameter profile of *Tectona grandis* L. f. trees.

Modelo	Parámetros de los modelos ajustados					
	B_1	B_2	B_3	B_4	P_1	P_2
1	0.06046	0.146891			0.084543	
2	1.816952	-0.90475	-918.732	352.4087	0.860866	
3	0.00000911	0.000031	0.000026		0.078421	0.584001
4	-3.02206	1.511058	130.0702	-1.1035	0.078792	0.685058
5	1.001502	-2.19351	257.5969		0.31635	0.921991
6	1.125800	0.072999*	-0.57610	9.341892	0.283357	0.891331

¹Valores de los parámetros $a_0=0.000056$; $a_1=1.832793$ y $a_2=0.987849$; ²Valor del parámetro $c_0=0.000039$. *No significativo.

¹Values of the parameters $a_0=0.000056$; $a_1=1.832793$ y $a_2=0.987849$; ²Value of the parameter $c_0=0.000039$. *Not significant.

ρ_1 = First-order auto-regressive parameter to be estimated

$t_{ij} - t_{i,j-1}$ = Distance between observations j and $j-1$ in each tree

ε_{ij} = Error term under conditions of independence

RESULTS AND DISCUSSION

Table 3 shows the values of the parameters of the adjusted models. All of them were significant, with a 95 % confidence level, except for parameter B_2 for model 6, which was not significant. Models 3 and 4 estimate the first inflexion point, where the neiloid changes to a paraboloid at 7 % of the total height; while the second inflexion point, at which the change from the paraboloid to a cone occurs, is estimated at 58 % and 68 %, respectively.

Based on the goodness-of-fit criteria and on the implemented scoring system, shown in Table 4, it may be noted that model 3 of Fang *et al.* (2000) has the best adjustment compared to the other models, having the lowest total score based on the highest R^2_{adj} value, which indicates that the model accounts to a larger degree for the total variability of the dependent variable; the slightest bias is indicative of the minimum deviation of the model from the observed values; furthermore, it has the second highest accuracy in the estimations, given its lower RMSE value, the lowest values in AIC, SSE and MSE, as well as the highest likelihood (loglik), as well as a high significance in each of its parameters. For all these reasons, it is considered appropriate to describe the stem diameter profile of teak trees in terms of normal diameter, stump height and total height. The second best model was model Max and Burkhardt's (1976) model 4.

Con base en los criterios de bondad de ajuste y el sistema de calificación implementado que se muestran en el Cuadro 4, se puede apreciar que el modelo 3 de Fang *et al.* (2000) tiene el mejor ajuste respecto a los otros modelos al presentar la calificación total más baja, a partir del valor más alto de la R^2_{adj} , el cual es indicativo de que el modelo explica en mayor grado la variabilidad total en la variable dependiente; el menor sesgo, es indicativo de que se tiene la mínima desviación del modelo con respecto a los valores observados; asimismo presentó la segunda más alta precisión en las estimaciones, dado su valor más bajo de la RECM; menores valores en el AIC, SCE y CME, así como el mayor de verosimilitud (loglik); además de, una alta significancia en cada uno de sus parámetros. Por todo lo anterior, se considera como el apropiado para describir el perfil diamétrico del fuste para los árboles de teca en función del diámetro normal, la altura del tocón y la altura total. El segundo mejor modelo fue el 4 de Max y Burkhart (1976).

El modelo 3, si bien entre todos los probados tiene el mayor número de parámetros, presenta la ventaja adicional de tener una ecuación explícita de volumen total que corresponde al modelo de Schumacher-Hall; además, de forma implícita cuenta con una ecuación de volumen comercial que al obtenerla mediante integración analítica resulta compatible con la función de ahusamiento; por lo que conforman un sistema que puede ajustarse de manera simultánea. Para una comparación más objetiva de la bondad de ajuste sobre el ahusamiento, se debieran asumir como constantes los valores de los parámetros $\alpha_1=2$ y $\alpha_2=1$. En la mayoría de los estudios que se usaron como contraste, el ajuste de este modelo es claramente superior, pero se soslaya siempre el hecho de que ello responde a que considera a muchos más parámetros disponibles; en el presente trabajo se optó por utilizar los modelos en la forma original, como fueron generados por sus respectivos autores.

Although of all the models tested model 3 has the largest number of parameters, it affords the additional advantage of having an explicit total volume equation that corresponds with the Schumacher-Hall model; furthermore, it implicitly contains a merchantable equation which, when obtained through analytic integration, is compatible with the taper function; therefore it constitutes a system that can be simultaneously adjusted. For a more objective comparison of the goodness of fit for taper, the values of parameters $\alpha_1=2$ and $\alpha_2=1$ should be assumed to be constant. In contrast the adjustment of this model is clearly superior in most studies, but the fact that this is because it considers many more available parameters is always overlooked; in the present research we chose to use the models in their original form, as they were created by their respective authors.

The function that estimates the merchantable volume (MV) proposed by Fang *et al.* (2000), compatible for its adjustment with that for taper, as well as the corresponding expression to estimate the merchantable height (MH) at a minimum merchantable diameter (d) and the total volume (V) equation are given below:

$$Vc = c_1 \cdot 2H^{k/B_1} [B_1 r_0 \cdot (l_1 \cdot l_2) (B_2 - B_1) r_1 \cdot l_2 B_2 - B_2] \alpha_1 r_2 - \beta (1 - q)^{k/B_1} \alpha_1^{1/2} \alpha_2^{1/2}$$

$$MH = H [1 - ((d^2 / (c_1 \cdot 2H^{k/B_1} \alpha_1^{1/2} \alpha_2^{1/2}))^{\beta \alpha_1})]$$

Along with the taper expression (model 3),

$$V = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$$

Thus, the volume estimation system for individual teak trees is formed. With the total volume equation defined in terms of the normal diameter and the total height, a total volume table can be easily generated, while combining the rest of the equations makes

Cuadro 4. Estadísticas de bondad de ajuste de los seis modelos segmentados evaluados para describir el perfil diamétrico de árboles de *Tectona grandis* L. f.

Table 4. Statistics of goodness to fit of the six segmented models evaluated in order to describe the diameter profile of *Tectona grandis* L. f. trees.

Modelo	Valores de los estadísticos en el ajuste y calificación respectiva							Calificación total
	SCE	CME	RECM	R^2_{adj}	Sesgo	AIC	loglik	
1	4,941.9 (5)	1.8684 (5)	1.3668 (5)	0.9839 (5)	-0.0019 (1)	1,658.2 (5)	-4,583 (5)	31
2	4,985.3 (6)	1.8862 (6)	1.3734 (6)	0.9838 (6)	0.1863 (4)	1,685.3 (6)	-4,595 (6)	40
3	3,897.7 (1)	1.4764 (1)	1.2150 (1)	0.9873 (1)	0.0125 (2)	1,039.6 (1)	-4,269 (1)	8
4	4,877.3 (3)	1.8461 (3)	1.3586 (3)	0.9841 (3)	0.2102 (6)	1,629.3 (3)	-4,566 (3)	24
5	4,877.6 (4)	1.8462 (4)	1.3587 (4)	0.9841 (4)	0.2099 (5)	1,629.5 (4)	-4,566 (4)	29
6	4418.6 (2)	1.6724 (2)	1.2932 (2)	0.9856 (2)	0.0855 (3)	1,367.8 (2)	-4,435 (2)	15



La función que calcula el volumen comercial (V_c) propuesta por Fang *et al.* (2000), la cual es compatible para su ajuste con la del ahusamiento, así como la expresión correspondiente para estimar la altura comercial (HM) a un diámetro mínimo comercial (d) y la ecuación de volumen total (V) se refieren a continuación:

$$V_c = c_1 \cdot 2H^{k_1} \cdot (B_1 \cdot r_0 + (l_1 + l_2) (B_2 - B_1) r_1 + l_2 B_2 - B_2) \alpha_1 r_2 - \beta (1 - q)^{k_2} \alpha_1^{1/2} \alpha_2^{1/2}$$

$$HM = H [1 - ((d^2 / (c_1 \cdot 2H^{k_1} \cdot (B_1 \cdot r_0 + (l_1 + l_2) (B_2 - B_1) r_1 + l_2 B_2 - B_2) \alpha_1^{1/2} \alpha_2^{1/2}))^{\beta / (k_1 - \beta)})]$$

Junto con la expresión de ahusamiento (modelo 3),

$$V = a_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$$

Así, queda conformado el sistema de cubicación para árboles individuales de teca. Con la ecuación de volumen total, definida a partir del diámetro normal y la altura total, es fácil generar una tabla de volumen total; en tanto que al combinar el resto de las ecuaciones hace posible determinar el volumen comercial a un diámetro o altura mínimo requerido, además del diámetro mínimo a una altura comercial en particular y viceversa.

En el Cuadro 5 se presentan los valores de los parámetros y estadísticos del ajuste simultáneo del sistema de ahusamiento y volumen comercial al usar NLS. Diéguez-Aranda *et al.* (2009) señalan que cuando se estiman todos los parámetros del sistema de manera simultánea, se optimiza la suma de cuadrados de los errores; con ello se logra minimizar los de predicción tanto del diámetro a diferentes alturas, como del volumen.

Los resultados en términos de calidad del ajuste y respecto a los puntos de inflexión (p_1 , p_2) son muy similares a los obtenidos por Pompa-García *et al.* (2009) para árboles de *Quercus* sp. que forman bosques naturales comerciales en Chihuahua, México; a los registrados por Fang *et al.* (2000) para *Pinus taeda* L. y *P. elliotii* Engelm. establecidos en plantaciones de la costa atlántica de Estados Unidos de América; y a los de Corral-Rivas *et al.* (2007) para ejemplares de cinco especies de *Pinus* en bosques naturales de Durango, México.

También coinciden con los datos a conocer por Diéguez-Aranda *et al.* (2006) para individuos de *Pinus sylvestris* L. que conforman rodales naturales en el noroeste de España; y a los consignados por Li y Weiskittel (2010) para árboles de *Abies balsamea* (L.) Mill., *Picea rubens* Sarg. y *Pinus strobus* L. localizados en bosques naturales en la región Acadian de Norte América. En todos los casos, p_1 se estima por abajo de 10% de la altura total y p_2 entre 54 - 69%, lo que revela que el modelo de Fang *et al.* (2000) es lo suficientemente flexible para aplicarlo en la descripción del ahusamiento del fuste tanto de latifoliadas como de coníferas en diferentes regiones ecológicas.

it possible to determine the merchantable volume at a minimum required diameter or height, as well as at a minimum diameter at a particular merchantable height and vice versa.

Table 5 shows the values of the parameters and statistics of the simultaneous adjustment of the taper system and merchantable volume using NLS. Diéguez-Aranda *et al.* (2009) point out that the simultaneous estimation of all the parameters of the system results in the optimization of the sum of squared errors; this minimizes prediction errors for the diameter at various heights and for volume.

The results in terms of the quality of the adjustment and with regard to the inflexion points (p_1 , p_2) are very similar to those obtained by Pompa-García *et al.* (2009) for *Quercus* sp. trees, which form natural merchantable forests in Chihuahua, Mexico; to those recorded by Fang *et al.* (2000) for *Pinus taeda* L. and *P. elliotii* Engelm. established in plantations of the Atlantic coast of the United States of America, and to those of Corral-Rivas *et al.* (2007) for specimens of five *Pinus* species in natural forests of Durango, Mexico.

They also agree with those revealed by Diéguez-Aranda *et al.* (2006) for *Pinus sylvestris* L. individuals that form natural stands in northwestern Spain, and those recorded by Li and Weiskittel (2010) for *Abies balsamea* (L.) Mill., *Picea rubens* Sarg. and *Pinus strobus* L. trees localized in natural forests of the Acadian region in North America. In every case, p_1 is estimated to be below 10% of the total height, and p_2 between 54 and 69%, which shows that the model of Fang *et al.* (2000) is flexible enough to be applied to the description of the stem taper of both broadleaves and conifers in various ecological regions.

The combination of management practices (prunings and thinnings carried out in a timely way and with an appropriate intensity) with the use of improved genetic material produces trees without branching that tend to adopt a more cylindrical stem shape, which generates shape factors of 0.38 - 0.43 for teak trees planted in Ghana and Ivory Coast, in an age interval of 1 to 19 years (Adu-Bredu *et al.*, 2008). In comparison, the Schumacher-Hall total volume model implied in the taper function produced, in average, the equivalent to a constant shape factor of 0.43; this model estimates total volumes that are very similar to those observed. However, it is lower than the shape factor of 0.45 currently used for teak in the studied region and in other countries of Tropical America (Chaves y Fonseca, 1991; Pérez and Kanninen, 2003); it is lower than that cited by Pérez and Kanninen (2005), which is 0.44 for *T. grandis* trees with a plantation age of 8 years in Costa Rica, and to that determined by Moret *et al.* (1998), of 0.47, in Venezuela.

These differences may be partially attributed to the diverse growth conditions determined by the climate, the soil, and the topography among others. Although the total volume



Cuadro 5. Parámetros y estadísticos del ajuste simultáneo del sistema conformado por los modelos de ahusamiento y volumen comercial para *Tectona grandis* L. f al usar NLS.

Table 5. Parameters and statistics of the simultaneous adjustment of the system formed by the taper models and merchantable volumes of *Tectona grandis* L. f. using NLS.

Parámetro	Estimador	Error Estándar	Valor de t	Nivel de significancia
α_0	0.000054	0.0000014	39.88	<0.0001
α_1	1.848809	0.0055600	332.25	<0.0001
α_2	0.979956	0.0071500	137.06	<0.0001
B_1	0.0000092	0.0000002	58.94	<0.0001
B_2	0.000031	0.0000001	238.54	<0.0001
B_3	0.000026	0.0000002	115.94	<0.0001
p_1	0.078947	0.0016800	47.03	<0.0001
p_2	0.588163	0.0096300	61.11	<0.0001

La combinación de prácticas de manejo (podas y aclareos efectuados en tiempo oportuno e intensidad conveniente) con el uso de material genético mejorado produce árboles sin bifurcación que tienden a adoptar una forma del fuste más cilíndrica, lo que genera factores de forma de 0.38 - 0.43 para teca plantada en Ghana y Costa de Marfil, en un intervalo de edad de 1 a 19 años (Adu-Bredu *et al.*, 2008). Comparativamente, el modelo de volumen total de Schumacher-Hall implícito en la función de ahusamiento arrojó, en promedio, el equivalente a un factor de forma constante de 0.43; este modelo estima volúmenes totales muy próximos a los observados. Sin embargo, es inferior al factor de forma de 0.45 actualmente usado para teca en la región bajo estudio y en otros países de América Tropical (Chaves y Fonseca, 1991; Pérez y Kanninen, 2003); es menor al citado por Pérez y Kanninen (2005) correspondiente a 0.44 para árboles de *T. grandis* con una antigüedad de plantación de 8 años en Costa Rica; y al determinado por Moret *et al.* (1998) de 0.47 en Venezuela.

Tales diferencias es factible atribuir las, al menos parcialmente, a las diferentes condiciones de crecimiento relativas al clima, suelo, topografía, entre otras. El volumen total que se calculó con el modelo para árboles de teca en la zona de estudio, si bien tiende a ser ligeramente conservador, sobre todo en árboles con mayor edad que pueden considerarse maduros y de interés comercial para la cosecha final, es mucho más realista para las condiciones de crecimiento prevalecientes.

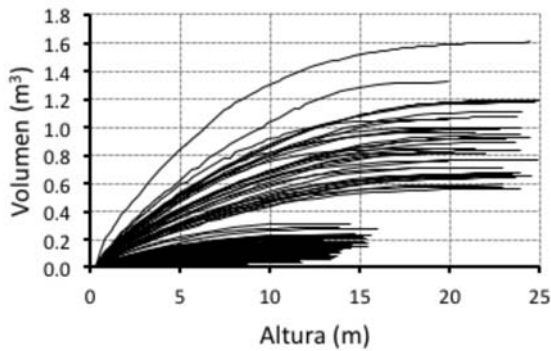
La comparación del ajuste simultáneo del sistema al usar NLS y MEM aún sin corregirse por heterocedasticidad y autocorrelación (MEM-A), se efectuó mediante la prueba de razón de verosimilitud que resultó significativa ($p < 0.0001$) (Cuadro 6); es mejor el ajuste al usar MEM, dados los menores valores en el criterio de información de Akaike (AIC) y en el criterio de información Bayesiano (BIC), así como el mayor valor en la verosimilitud (logLik).

calculated with the model for teak trees in the studied area tends to be slightly conservative, especially for trees with a higher age that may be considered mature and as merchantable for the final crop, it is much more realistic than for the prevailing growth conditions.

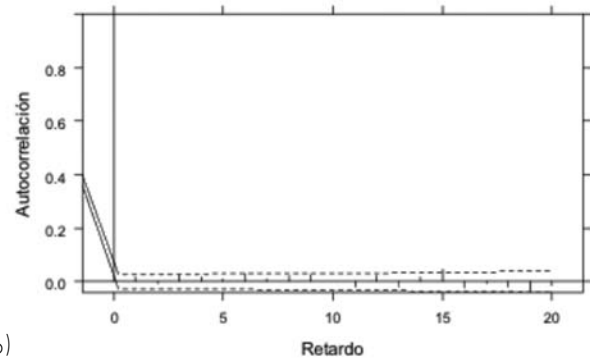
The comparison of the simultaneous adjustments of the system using NLS and MEM, even without correction for heteroskedasticity and self-correlation (MEM-A), was carried out with the test for the likelihood ratio, which turned out to be significant ($p < 0.0001$) (Table 6); the adjustment is better when using MEM, given the lower values in the Akaike (AIC) and Bayesian (BIC) information criteria, as well as the higher likelihood value (logLik).

Table 6 shows that the MEM-C corrected for both heteroskedasticity and self-correlation is statistically better. Cruz-Cobos *et al.* (2008) point out that in certain cases adding specific parameters allows a more efficient use of the data and minimizes the heteroskedasticity and self-correlation problems without having to resort to the explicit correction of these conditions; nevertheless, according to Gerber and Maguire (2003), the procedure mentioned above must be followed in order to correct them completely. Thus, after the cited correction, the residual values of the MEM are more homogenous, as shown by the stationarity and nonsignificance in the first delays (Figure 2).

Table 7 summarizes the values of the parameters, the goodness of fit and the intervals for the fixed effect parameters as a result of the adjustment of model 7 MEM-C. Unlike in the NLS adjustment method (Table 5), there is a gain in efficiency in the scoring of the inflexion points, because the standard error is reduced by 60 % for p_1 and by 40 % for p_2 , although the efficiency of the rest of the parameters is reduced because their standard errors are higher. This does not affect the hypothesis tests or the scale of the estimated parameters for stem shape and total volume.



a)



b)

Residuales tipo Parson = Pearson residuals; Autocorrelación = Self-correlation; Tiempo = Time; Retardo = Delay

Figura 2. Comportamiento gráfico de los residuales (a) y de retardos (b) después de la corrección por autocorrelación con una estructura tipo AR(1).

Figure 2. Graphic behavior of the residuals (a) and of delays (b) after correction for self-correlation with a AR(1) structure.

Cuadro 6. Estadísticos del ajuste simultáneo del sistema conformado por los modelos de ahusamiento y volumen comercial para *Tectona grandis* L. f al efectuarlo por NLS y como MEM.

Table 6. Statistics for the simultaneous adjustment of the system by the taper and merchantable volume models for *Tectona grandis* L. f. using NLS and MEM.

Modelo	gl ¹	AIC	BIC	loglik	Prueba	R. de V. ²	Valor de p
2. MEM-A	10	13 050.630	13 116.380	-6 515.315			
1. NLS	9	13 426.040	13 485.210	-6 704.020	1 vs 2	377.4103	<0.0001
2. MEM-A	10	13 050.629	13 116.376	-6 515.315			
3. MEM-B	11	7 764.171	7 836.493	-3 871.086	2 vs 3	5 288.458	<0.0001
4. MEM-C	12	1 808.541	1 887.438	-892.271	3 vs 4	5 957.630	<0.0001

¹gl= grados de libertad; ²Razón de verosimilitud.

¹DF= degrees of freedom; ²L. R.=Likelihood ratio.

El Cuadro 6 muestra que el MEM-C corregido tanto por heterocedasticidad como por autocorrelación es estadísticamente mejor. Cruz-Cobos *et al.* (2008) refieren que en ciertos casos adicionar parámetros específicos permite un uso más eficiente de los datos y minimiza los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación, sin tener que recurrir a la corrección explícita de estas condiciones; aunque, para su completa corrección y de acuerdo con Garber y Maguire (2003) es necesario recurrir al procedimiento antes referido. Así, después de la corrección citada los residuales del MEM son más homogéneos, como lo demuestra la estacionariedad y no significancia en los primeros retardos (Figura 2).

The gain from adjustment using the MEM approach may be better appreciated by observing the behavior of the residuals versus the predicted values, especially those for taper (Figure 3), whose distribution tends to be random around zero and whose dispersion scale is lower compared to the residuals of the adjustment with NLS. In this regard, Fang and Bailey (2001) indicate that, under the MEM approach, it is possible to improve the characteristics of the parameters by compensating for the effect of variables taken in the same experimental unit; they add that this approach takes into account the contemporary correlation, which helps reduce the standard error of the model parameters significantly and unify the values by component.



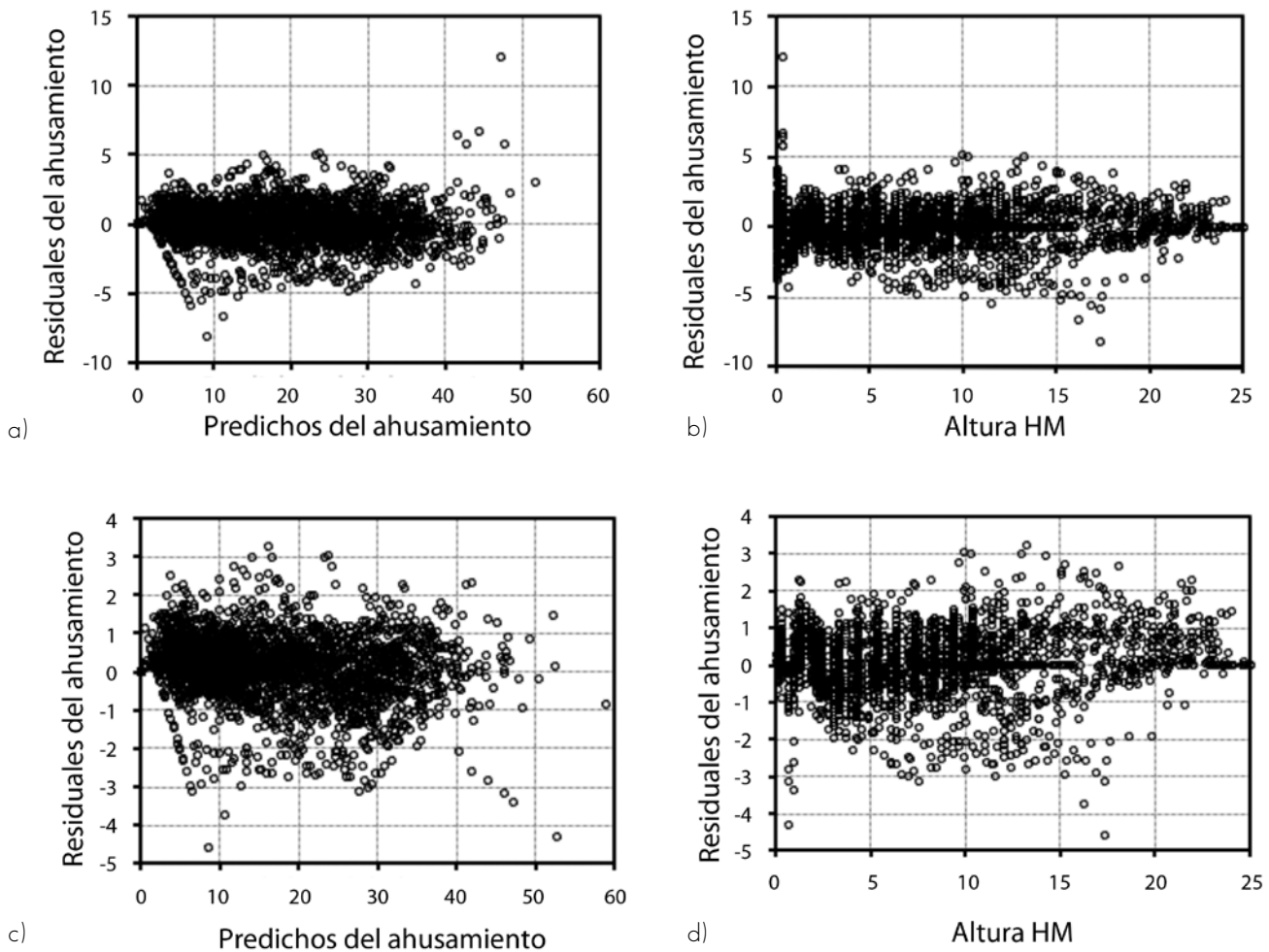


Figura 3. Comportamiento de residuales del ahusamiento contra predichos (a y c) y contra HM (b y d) al realizar el ajuste por NLS y por MEM, respectivamente.

Figure 3. Behavior of the taper residual values versus the predicted tapers (a and c) and versus HM (b and d) when making adjustments with NLS and with MEM, respectively.

En el Cuadro 7 se resumen los valores de los parámetros, la bondad del ajuste y los intervalos para los parámetros con efectos fijos, resultado del ajuste del modelo 7 MEM-C. En comparación con el método de ajuste NLS (Cuadro 5); se observa una ganancia en la eficiencia al calificar los puntos de inflexión, pues se logra una reducción de 60 % en el error estándar para p_1 y de 40 % en p_2 , aun cuando en el resto de los parámetros se reduce su eficiencia, ya que sus errores estándar son superiores. Lo anterior no afecta a las pruebas de hipótesis ni la escala de los parámetros estimados tanto para la forma del fuste como para el volumen total.

With the basic information provided by the values taken by the random parameters (B_1 , F , y p_1) for each tree (Table 8), by using MEM it is possible to predict merchantable volumes with great accuracy in trees with a high economic value, without modifying the structure of the model through the introduction of additional observations (Fang and Baily, 2001). For this purpose, the specific random effects of the trees of interest are defined and directly incorporated in the prediction; Cruz-Cobos *et al.* (2008) developed the process for this estimation. Besides the basic information for the system adjustment, additional a priori inventory information about the trees of interest is required, including the new diameter measures (at stump height and above the normal diameter with its corresponding height), as well as the normal diameter and total height.



Cuadro 7. Parámetros fijos estimados y bondad de ajuste del modelo 7 corregido por heterocedasticidad y autocorrelación (MEM-C).
Table 7. Estimated fixed parameters and goodness of fit of model 7 corrected for heteroskedasticity and self-correlation (MEM-C).

Parámetro	Valores de los parámetros				Intervalo	
	Estimador	Error Estándar	Valor de t	Significancia	Inferior	Superior
α_0	0.000043	0.0000026	16.25806	<0.0001	0.000038	0.000048
α_1	1.857931	0.0156744	118.53275	<0.0001	1.827225	1.888636
α_2	1.041967	0.0248644	41.90599	<0.0001	0.993259	1.090675
B_1	0.000008	0.0000002	44.74921	<0.0001	0.000007	0.000008
B_2	0.000031	0.0000002	124.58794	<0.0001	0.000030	0.000031
B_3	0.000025	0.0000002	113.51315	<0.0001	0.000024	0.000025
ρ_1	0.062788	0.0006581	95.40379	<0.0001	0.061499	0.064078
ρ_2	0.583021	0.0057264	101.81230	<0.0001	0.571803	0.594239

La ganancia por ajustar bajo el enfoque de MEM puede apreciarse mejor al observar el comportamiento de los residuales contra los predichos, principalmente los que corresponden al ahusamiento (Figura 3), en los que, además de tener una distribución que tiende a ser aleatoria alrededor de cero, la escala en la dispersión es menor en comparación con los residuales que arroja el ajuste por NLS. Al respecto, Fang y Bailey (2001) indican que bajo el enfoque MEM es posible mejorar las características de los parámetros al compensar por el efecto de variables tomadas en una misma unidad experimental; agregan que dicha perspectiva considera la correlación contemporánea, lo que ayuda a reducir de forma importante el error estándar de los parámetros del modelo y a unificar los valores por componente.

Con la información básica dada por los valores que toman los parámetros aleatorios (B_1 , F , y ρ) a nivel de árbol (Cuadro 8), al usar MEM es posible realizar predicciones de volumen comercial muy precisas en árboles con alto valor económico, sin que se modifique la estructura del modelo al incluir observaciones adicionales (Fang y Bailey, 2001). Para ello, se definen los efectos aleatorios específicos de los árboles de interés y se incorporan de manera directa en la predicción; Cruz-Cobos *et al.* (2008) desarrollaron el proceso para realizar dicha estimación. Aparte de la información básica para el ajuste del sistema, es necesario contar con información *a priori* adicional de inventario de los árboles de interés, como son nuevas medidas de diámetros (del tocón y por arriba del diámetro normal con su correspondiente altura), además del diámetro normal y la altura total.

Diéguez-Aranda *et al.* (2006) and Li and Weiskittel (2010) found in their respective studies that the segmented model of Fang *et al.* (2000) performs well for the estimation of both the total volume and the diameters at various heights in conifer trees of different sizes as to their normal diameter and total height. In the present study, despite the excellent adjustment obtained, the model was observed –especially in mature trees– to be slightly less accurate for the estimation of heights and diameters in the vicinity of the normal diameter, compared to the estimations made from the second third of the total height.

Rodríguez and Broto (2003), who selected the same model, also identified a lower level of accuracy and a higher bias in the lower part of broadleaf trees (*Quercus pyrenaica* Willd., *Populus x euramericana* (Dode) Guinier and *Fagus sylvatica* (L.) of Castilla and Leon, Spain. They attributed this to the fact that the stem diameter is comparatively larger at that level and to the high variability in the stem shape in species with little apical dominance. In the present study, we consider that, while direct measures can be taken in the lower part of the tree, what really matters is to have a tool that allows accurate estimations of the minimum merchantable heights and diameters in the higher part of the stem, as well as knowledge of the respective merchantable and total volumes.



Cuadro 8. Parámetros aleatorios estimados del ajuste del modelo 7 (MEM-C).
 Table 8. Estimated random parameters of the adjustment of model 7 (MEM-C).

Estadístico	Estimado	Límite inferior	Límite superior
Desviación estándar de B_1	0.0000017	0.0000014	0.0000019
Error estándar dentro de grupo para B_1	1.7249560	1.5765450	1.8873370
Función de ponderación de varianza (F)	-0.2144176	-0.2173139	-0.2115214
Estructura de correlación (ρ)	0.9152120	0.8994335	0.9286080

Diéguez-Aranda *et al.* (2006) y Li y Weiskittel (2010) refieren en sus respectivos estudios que el modelo segmentado de Fang *et al.* (2000) se comporta bien para estimar tanto el volumen total como diámetros a diversas alturas en árboles de coníferas con diferente tamaño en diámetro normal y altura total. En este estudio, no obstante el excelente ajuste obtenido, se observó, sobre todo en árboles maduros, que el modelo tiende a ser ligeramente menos preciso para alturas y diámetros en la vecindad del diámetro normal, comparado con las estimaciones efectuadas a partir del segundo tercio de la altura total.

If a tree has a $D= 40.1$ cm and a $H= 24.7$ m, the system estimates a total stem volume of 1.16 m^3 , which is similar to the observed volume, of 1.17 m^3 , and is more accurate than the 1.41 m^3 obtained with the shape factor of 0.45. By specifying a minimum merchantable diameter at the stem tip of 12 m, a merchantable height of 18.2 m is estimated, and with these specifications and from the stump height, the merchantable volume would be 1.14 m^3 . Table 9 shows the total volume table generated using the Schumacher-Hall model.

Cuadro 9. Tabla de volumen total para árboles de plantaciones de *Tectona grandis* L. f.
 Table 9. Total volume table for trees in *Tectona grandis* L. f. plantations.

Dn (cm)	Altura Total (m)									
	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
7.5	0.012	0.016	0.020	0.024	0.028	0.033	0.037	0.041	0.046	0.050
10.0	0.020	0.027	0.034	0.041	0.049	0.056	0.063	0.070	0.078	0.085
12.5	0.030	0.041	0.052	0.063	0.074	0.085	0.096	0.107	0.118	0.129
15.0	0.043	0.058	0.073	0.088	0.103	0.119	0.134	0.150	0.165	0.181
17.5	0.057	0.077	0.097	0.117	0.137	0.158	0.179	0.199	0.220	0.241
20.0	0.073	0.098	0.124	0.150	0.176	0.202	0.229	0.255	0.282	0.309
22.5	0.091	0.122	0.154	0.187	0.219	0.252	0.285	0.318	0.351	0.384
25.0	0.110	0.149	0.188	0.227	0.267	0.306	0.347	0.387	0.427	0.468
27.5	0.132	0.178	0.224	0.271	0.318	0.366	0.414	0.462	0.510	0.558
30.0	0.155	0.209	0.264	0.319	0.374	0.430	0.486	0.543	0.599	0.656
32.5	0.180	0.242	0.306	0.370	0.434	0.499	0.564	0.630	0.695	0.761
35.0	0.206	0.278	0.351	0.424	0.498	0.573	0.647	0.723	0.798	0.874
37.5	0.234	0.316	0.399	0.482	0.566	0.651	0.736	0.821	0.907	0.993
40.0	0.264	0.356	0.450	0.544	0.639	0.734	0.830	0.926	1.023	1.120
42.5	0.296	0.399	0.503	0.609	0.715	0.821	0.929	1.036	1.145	1.253
45.0	0.329	0.444	0.560	0.677	0.795	0.913	1.033	1.153	1.273	1.394

Dn = diámetro normal

Dn = Normal diameter; Altura Total = Total height

Rodríguez y Broto (2003) al seleccionar el mismo modelo, también identificaron una menor precisión y mayor sesgo en la parte baja de árboles latifoliados (*Quercus pyrenaica* Willd., *Populus x euramericana* (Dode) Guinier y *Fagus sylvatica* L.) de Castilla y León, España; lo atribuyen a que en ese nivel, el diámetro del fuste es comparativamente más grande y a la alta variabilidad en la forma fustal en especies con poca dominancia apical. En el caso del presente estudio, se considera que toda vez que en la parte baja del árbol pueden hacerse mediciones de manera directa, lo realmente importante es disponer de una herramienta que permita realizar estimaciones precisas de las alturas y diámetros mínimos comerciales en la parte alta del fuste, además de conocer el respectivo volumen comercial y total.

Si se tiene un árbol con $D= 40.1$ cm y $H= 24.7$ m, el sistema cubica un volumen total del fuste de 1.16 m³, el cual es próximo al observado de 1.17 m³ y es mejor en términos de precisión al obtenido con el factor de forma de 0.45 , de 1.41 m³; al especificar un diámetro mínimo comercial en punta del fuste de 12 cm, se estima una altura comercial de 18.2 m, y con esas especificaciones y desde el tocón, el volumen comercial sería de 1.14 m³. En el Cuadro 9 se presenta la tabla de volumen total generada con el modelo de Schumacher-Hall.

CONCLUSIONES

El modelo seleccionado hizo posible alcanzar la precisión más alta y el menor sesgo entre seis funciones segmentadas de ahusamiento analizadas; fue seleccionado como el mejor para describir el perfil diamétrico del fuste y para cubicar árboles individuales de teca establecida en plantaciones comerciales en el sureste de México. Junto con su respectiva función de volumen comercial y total conforman un sistema completo de cubicación a nivel de cada árbol.

El ajuste simultáneo del sistema ahusamiento - volumen comercial mediante la técnica de modelos de efectos mixtos fue estadísticamente mejor que al usar mínimos cuadrados ordinarios, pues ofrece estimaciones más precisas y consistentes tanto del volumen comercial y total, como de diámetros mínimos comerciales a diferentes alturas y viceversa.


Los puntos de cambio de la forma dendrométrica del fuste de teca son similares a los registrados en otros estudios para otras especies latifoliadas y coníferas bajo manejo, lo que refleja la gran flexibilidad que tiene la función segmentada seleccionada; en promedio, el fuste de teca adopta la forma de cono por arriba de 58% de su altura total.

CONCLUSIONS

The selected model made it possible to attain the highest accuracy and the lowest bias between six analyzed segmented taper functions; it was selected as the best to describe the stem diameter profile and to estimate the volume of individual teak trees established in commercial plantations in southeastern Mexico. Together with its respective merchantable and total volume functions, it constitutes a complete volume estimation system at individual tree level.


The simultaneous adjustment of the taper - merchantable volume system using the mixed effect model technique was statistically better than with minimum ordinary squares, as it offers more accurate and consistent estimations for both merchantable and total volumes, as well as for minimum merchantable diameters at various heights, and vice versa.

The points of inflexion in the dendrometric shape of the teak stem are similar to those registered in other studies for other broadleaf and conifer species under management, which reflects the great flexibility of the selected segmented function; in average, the teak stem adopts the shape of a cone above 58% of its total height.

The total volume model implied in the taper function carries out estimations that are slightly conservative compared to those registered in the literature for this species in other countries of tropical America, but more similar to the volumes observed in the study area, a fact that reinforces its validity. 

End of the English version



El modelo de volumen total implícito en la función de ahusamiento realiza estimaciones que son ligeramente conservadoras comparadas con las que consigna la literatura para esta especie en otros países de América Tropical, pero más próximas a los volúmenes observados en la zona de estudio, lo cual refuerza su validez. 



REFERENCIAS

- Adu-Bredu, S., A. F. Tape B., J. P. Bouillet, M. Kouamé M., S. Yamoah K. and L. Saint-André. 2008. An explicit stem profile model for forked and un-forked teak (*Tectona grandis*) trees in West Africa. *Forest Ecol. Manag.* 255(7): 2189-2203.
- Bailey, L. R. 1995. Upper stem volumes from stem analysis data: an overlapping bolts method. *Can. J. For. Res.* 25(1): 170-173.
- Cao, Q. V., H. E. Burkhart and T. A. Max. 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Sci.* 26(1): 71-80.
- Chaves, E. y W. Fonseca. 1991. Teca (*Tectona grandis*) especie de árbol de uso múltiple en América Central. CATIE. Turrialba, Costa Rica. 47 p.
- Comisión Nacional Forestal (Conafor). 2012. Estadísticas de la superficie establecida de plantaciones forestales comerciales. Gerencia de Desarrollo de Plantaciones Forestales Comerciales. CD. s/p.
- Corral-Rivas, J. J., U. Diéguez-Aranda, S. Corral R. and F. Castedo D. 2007. A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (Mexico). *Forest Ecol. Manag.* 238(1-3): 118-129.
- Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas y J. R. Valdez-Lazalde. 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia* 42: 473-485.
- Diéguez-Aranda, U., F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez G. and A. Rojo. 2006. Compatible taper function for Scots pine plantations in northwestern Spain. *Can. J. For. Res.* 36(5): 1190-1205.
- Diéguez-Aranda, U., A. Rojo A., F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez G., M. Barrio-Anta, F. Crecente-Campo, J. M. González G., C. Pérez-Cruzado, R. Rodríguez S., C. A. López-Sánchez, M. Á. Balboa-Murias, J. J. Gorgoso V. y F. Sánchez R. 2009. Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Universidad de Santiago de Compostela. Galicia, España. 259 p.
- Fang, Z. and R. L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *Forest Sci.* 47(3): 287-300.
- Fang, Z., B. E. Borders and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Sci.* 46(1): 1-12.
- Garber, S. M. and D. A. Maguire. 2003. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. *Forest Ecol. Manag.* 179(1-3): 507-522.
- Hall, D. B. and J. L. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60(1): 16-24.
- Li, R. and A. R. Weiskittel. 2010. Comparison of model forms for estimating for stem taper and volume in the primary conifer species of the North American Acadian Region. *Ann. For. Sci.* 67(3): 302.
- Max, T. A. and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Sci.* 22(3): 283-289.
- Moret, Y., M. Jerez y L. Vincent. 1998. Determinación de ecuaciones de volumen para plantaciones de teca (*Tectona grandis* L.) en la unidad experimental de la reserva forestal Caparo. *Revista Forestal Venezolana* 42(1): 41-50.
- Parresol, B., J. Hotvedt and Q. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Can. J. For. Res.* 17(3): 250-259.
- Pérez C., L. D. and M. Kanninen. 2003. Provisional equations for estimating total and merchantable volume for *Tectona grandis* trees in Costa Rica. *Forests, Trees and Livelihoods* 13(4):345-359.
- Pérez C., L. D. and M. Kanninen. 2005. Effect of thinning on stem form and wood characteristics of teak (*Tectona grandis*) in a humid tropical site in Costa Rica. *Silva Fenn.* 39(2): 217-225.
- Pinheiro, J. C. and D. M. Bates. 2000. *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. Springer Verlag, New York, NY, USA. 528 p.
- Pompa-García, M., J. J. Corral-Rivas, J. C. Hernández-Díaz and J. G. Álvarez-González. 2009. A system for calculating the merchantable volume of oak trees in the northwest of the state of Chihuahua, Mexico. *Journal of Forestry Research* 20(4): 293-300.
- R Development Core Team. 2009. R: a language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. <http://www.R-project.org> (18 de mayo de 2011).
- Rodríguez, P. y M. Broto. 2003. Ecuaciones de volumen comercial para las principales especies maderables de Castilla y León. Junta de Castilla y León. CESEFOR. Soria, España. 33 p.
- Sakici, O. E., N. Misira, H. Yavuz and M. Misira. 2008. Stem taper functions for *Abies nordmanniana* subsp. *bormmulleriana* in Turkey. *Scandinavian Journal of Forest Research* 23(6): 522-533.
- Statistical Analysis System (SAS). 2008. *SAS/STAT® 9.2 User's Guide*. SAS Institute Inc. Raleigh, NC USA. s/p.
- Wiant, Jr. H. V., G. B. Wood and G. M. Furnival. 1992. Estimating log volume using the centroid position. *Forest Science* 38(1): 187-191.
- Zepeda B., E. M. y A. Domínguez P. 1997. Ecuaciones de ahusamiento para tres especies de pino, del ejido El Largo, Chihuahua. In: *Memoria de resúmenes de ponencias. III Congreso Mexicano sobre Recursos Forestales*. Linares, NL México. p. 43.
- Zhang, Y., B. E. Borders and R. L. Bailey. 2002. Derivation, fitting, and implication of a compatible stem taper-volume-weight system for intensively managed, fast growing loblolly pine. *Forest Sci.* 48(3): 595-607.
- Zimmerman, D. L. and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: an overview (with discussion). *Test* 10(1): 1-73.





