



¿Mínimos cuadrados ordinarios o regresión frontera estocástica para estimar la línea de autoaclareo con la ecuación de *Yoda*?

Ordinary least squares, or stochastic frontier regression to estimate the maximum density line with *Yoda* equation?

Juan Carlos Tamarit-Urias^{1*}

Fecha de recepción/Reception date: 15 de diciembre de 2022.

Fecha de aceptación/Acceptance date: 24 de febrero de 2023

¹ Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias. Campo Experimental San Martinito. México.

*Autor para correspondencia; correo-e: tamarit.juan@inifap.gob.mx

*Corresponding author; e-mail: tamarit.juan@inifap.gob.mx

Resumen

La determinación precisa de la línea de autoaclareo mediante funciones tamaño-densidad junto con las guías para manejar la densidad (GMD) son insumos fundamentales para gestionar la densidad de rodales. Objetivos: (1) comparar las técnicas de ajuste de parámetros de mínimos cuadrados ordinarios lineales (MCO-L) combinada con criterios para desplazar la línea promedio y regresión frontera estocástica (RFE) para determinar la línea de autoaclareo con la ecuación de *Yoda*; (2) generar una GMD para *Pinus montezumae* en Puebla, México. Se utilizaron 90 sitios de muestreo circulares de 0.10 ha, ubicados en condición de alta densidad, cubrieron un amplio intervalo de edad y condiciones de crecimiento. Las variables número de árboles (N) y volumen promedio por árbol (Vp) se escalaron a una hectárea. Para MCO-L se aplicaron criterios teóricos para modificar el valor del intercepto (parámetro a) y desplazar la línea promedio a la frontera superior de las observaciones; para RFE se evaluaron las modalidades del modelo seminormal (MSN), modelo normal truncado (MNT) y modelo normal exponencial (MNE). Con el criterio de utilizar Vp y N del sitio con el índice de densidad del rodal máximo para aumentar el parámetro del intercepto, MCO-L reproduce una línea de autoaclareo similar a las modalidades de RFE. Por tanto, se seleccionó a RFE-MSN para reproducirla. El índice de densidad del rodal de *Yoda* fue de 9.2 m³. Con una alometría específica y 100 árboles ha⁻¹ como densidad de referencia, se delimitaron las zonas de crecimiento de *Langsaeter* que conformaron la GMD, esta es útil para prescribir regímenes de aclareos.

Palabras clave: Aclareos, densidad del rodal, ley de -3/2, MCO o RFE, modelo tamaño-densidad, *Pinus montezumae* Lamb.

Abstract

Accurate determination of the self-thinning line using size-density functions together with density management guidelines (DMGs) are fundamental inputs for managing stand density. Objectives: (1) to compare linear ordinary least squares (OLS) parameter fitting techniques combined with criteria to shift the mean line and

stochastic frontier regression (SFR) to determine the self-thinning line with the Yoda equation; (2) to generate a DMG for *Pinus montezumae* in Puebla, Mexico. Ninety circular 0.10 ha sampling sites were used, located in a high density condition, covering a wide range of ages and growth conditions. The variables number of trees (N) and average volume per tree (aV) were scaled to one hectare. For OLS, theoretical criteria were applied in order to modify the value of the intercept (parameter a) and move the average line to the upper boundary of the observations; for the SFR, the semi-normal model (SNM), the truncated normal model (TNM) and exponential normal model (ENM) modalities were evaluated. With the criterion of using the aV and N of the site with the maximum stand density index to increase the intercept parameter, the OLS, a self-thinning line similar to the SFR modes is reproduced. Therefore, SFR-SNM was selected to reproduce it. The density index of the Yoda stand was 9.2 m^3 . With a specific allometry and $100 \text{ trees ha}^{-1}$ as reference density, Langsaeter's growth zones were delimited to form the DMG, which is useful for prescribing thinning regimes.

Key words: Thinnings, stand density, law of $-3/2$, OLS or SFR, size-density model, *Pinus montezumae* Lamb.

Introducción

Los valores de los parámetros (intercepto y pendiente) de alguna función de autoaclareo se determinan con diferentes métodos y técnicas de ajuste, todos orientados a mejorar la definición de la línea de autoaclareo. Entre los principales están: mínimos cuadrados ordinarios lineales, mínimos cuadrados ordinarios ponderados lineales, eje mayor reducido, regresión cuantílica, análisis de componentes principales, modelo de efectos mixtos, regresión segmentada, modelo Bayesiano jerárquico y regresión frontera estocástica (Solomon y Zhang, 2002; Zhang *et al.*, 2005; Sun *et al.*, 2010; Zhang *et al.*, 2015; Salas-Eljatib y Weiskittel, 2018; Aiguo *et al.*, 2019; Tian *et al.*, 2021; Long *et al.*, 2022).

De las técnicas referidas destacan como mejores las de mínimos cuadrados ordinarios lineales (MCO-L) y regresión frontera estocástica (RFE); por ello, es usual que se comparen con el propósito de determinar con mayor precisión la línea de autoaclareo para construir guías de manejo de densidad (GMD) (Santiago-García *et al.*, 2013; Salas-Eljatib y Weiskittel, 2018). Sin embargo, en esos contrastes, para mínimos cuadrados ordinarios lineales no se consideran los criterios teóricos definidos para aumentar el valor del intercepto, y así desplazar la línea promedio a

la frontera superior de las observaciones. Desde esta perspectiva, en estudios como los de Camacho-Montoya *et al.* (2018), Quiñonez-Barraza *et al.* (2018) y Tamarit-Urias *et al.* (2019), queda de manifiesto que la técnica de MCO-L está en una clara situación de desventaja, razón por la que es necesario explorar y comparar esta técnica cuando se incluyan los criterios referidos.

El propósito de realizar contrastes más objetivos es definir un proceso metodológico preciso y eficiente, tanto para determinar la línea de autoaclareo como para la construcción de GMD (Zhang *et al.*, 2005; VanderSchaaf y Burkhart, 2007; Salas-Eljatib y Weiskittel, 2018; Marchi, 2019; Tian *et al.*, 2021), así como para disponer de estrategias alternativas con eficiencia similar.

La ley de autoaclareo o de los $-3/2$ fue propuesta por Yoda *et al.* (1963), tiene fundamento biológico, ecológico y matemático, y analiza la mortalidad debida a la competencia extrema por espacio, nutrientes, agua y luz solar en poblaciones regulares, con énfasis en bosques coetáneos monoespecíficos (Weiskittel *et al.*, 2011; Gavrikov, 2015; Lee y Choi, 2019). Esta relación matemática está dada por el peso medio de la población y su respectivo número máximo de individuos vivos que puede sustentar el sitio, y se define por el volumen medio de la planta (o biomasa) relacionado con la cantidad de individuos por unidad de área (Weller, 1987; Santiago-García *et al.*, 2013; Xue *et al.*, 2015).

El postulado teórico de la función de Yoda establece que, para un determinado rodal, existe una relación tamaño-densidad máxima, la cual es independiente de la edad y la calidad del sitio. Cuando el logaritmo del peso medio (volumen o biomasa) de los individuos se grafica contra el logaritmo del número de árboles, se obtiene una línea recta cuyo valor de la pendiente se asume que toma un valor constante de -1.5 (Yoda *et al.*, 1963). La principal utilidad de la pendiente, junto con la ordenada al origen (intercepto), es determinar la línea de autoaclareo como respuesta a la alta mortalidad por competencia extrema (Pretzsch, 2009; Schulze *et al.*, 2019; Long *et al.*, 2022).

En ecología de poblaciones, se ha aceptado que el principio más importante que subyace en el manejo de la densidad de rodales es el de autoaclareo, y que la línea de autoaclareo determinada con la función de *Yoda* indica la densidad máxima posible por unidad de superficie para una determinada especie, bajo un volumen promedio por árbol predeterminado (Weller, 1987; Zeide, 1987; Gavrikov, 2015; Schulze *et al.*, 2019). En contraparte, actualmente prevalece un constante debate científico internacional respecto a si la pendiente de la función es constante con independencia de factores como la especie, calidad de sitio, edad, origen de la masa, localización geográfica u otro. En ese sentido, reiteradamente se ha cuestionado la validez del valor de una pendiente constante y se ha documentado que esta es significativamente diferente en términos de especies, calidades del sitio e historial de manejo (Weller, 1987; Zeide, 1987; Osawa y Allen, 1993; Solomon y Zhang, 2002; Fu *et al.*, 2008; Ge *et al.*, 2017).

Por su parte, las guías o diagramas para manejar la densidad (GMD) de rodales mediante la prescripción de regímenes de aclareos, se construyen con base en la línea de autoaclareo que reproduce funciones tamaño-densidad (Santiago-García *et al.*, 2013; Brunet-Navarro *et al.*, 2016; Newton, 2021), entre las que sobresale la propuesta por *Yoda* (Tian *et al.*, 2021).

Las GMD son el insumo y herramienta principal para gestionar la densidad de rodales naturales o de plantaciones forestales comerciales (Tamarit-Urias *et al.*, 2020; Newton, 2021). De esta manera, las decisiones que toma el responsable del manejo silvícola sobre intervenir o no y en qué medida a determinados rodales, estarán fundamentadas analíticamente, lo que contribuirá a mejorar el manejo técnico-silvícola de los bosques.

Pinus montezumae Lamb. es una conífera con amplia distribución y abundancia en el Eje Neovolcánico Transversal de México. Los árboles alcanzan alturas de 25 a 30 m, su madera tiene alta importancia para su aprovechamiento comercial, y crece en

forma óptima a una altitud promedio de 2 500 m con 800 mm anuales de precipitación (Conafor, 2019). Sin embargo, para esta especie se carece de una GMD con fundamento biológico y ecológico, por lo que de acuerdo con Tamarit-Urias *et al.* (2020) y Newton (2021), es necesario desarrollar esa importante herramienta que brinde soporte técnico para la evaluación del nivel de densidad y competencia de rodales, así como para la prescripción de aclareos, y con ello, se contribuya a la aplicación de una silvicultura cuantitativa.

Para discernir los planteamientos referidos, se definieron dos objetivos: (1) comparar las técnicas de ajuste de parámetros de mínimos cuadrados ordinarios lineales en combinación con criterios teóricos para desplazar la línea promedio y regresión frontera estocástica para determinar la línea de autoaclareo mediante la ecuación de *Yoda*; (2) generar una GMD para rodales naturales coetáneos de *P. montezumae* en Puebla, México.

Materiales y Métodos

El estudio se realizó en la Unidad de Manejo Forestal 2103 región Teziutlán, localizada en la parte nororiental de Puebla, México, entre los 20°02'34" y 19°36'34" N, y 97°43'46" y 97°22'23" O. La altitud promedio es de 2 220 m, la temperatura media anual fluctúa de 12 a 22 °C, y los suelos son tipo Luvisol (Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez, 2005).

La información dasométrica se obtuvo de 90 sitios de muestreo circulares de 1 000 m², ubicados en rodales naturales coetáneos de *P. montezumae* en condición de densidad y competencia alta. Los criterios para establecer cada sitio de muestreo fueron que *P. montezumae* era la especie dominante en al menos 80 % en términos de la

cantidad de árboles o densidad dentro del rodal, que no se hubiesen realizado intervenciones silvícolas como aclareos y podas en los últimos cinco años previos a la medición, y que estuviera presente el fenómeno de cierre de copas. De este modo, se cubrió un amplio intervalo de edad y de condiciones de crecimiento.

Las variables dasométricas generadas por sitio fueron la densidad expresada como el número de árboles (N) y el volumen promedio del árbol (Vp). El volumen rollo total de cada árbol para las especies presentes en los sitios se estimó con las ecuaciones alométricas referidas en Tamarit *et al.* (2022). Las variables N y Vp se escalaron a nivel de hectárea y se conformó una base de datos para ajustar el modelo tamaño-densidad de Yoda (Yoda *et al.*, 1963). Previo al ajuste, la base de datos se auditó mediante inspección gráfica para corroborar que las variables de interés presentaran un comportamiento biológicamente realista. Los estadísticos básicos de las variables procesadas se presentan en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos de las variables dasométricas analizadas y de algunos atributos de los rodales de *Pinus montezumae* Lamb.

Variable	Mínimo	Media	Máximo	DE	CV
N (árboles ha ⁻¹)	190.00	910.00	3 390.00	740.3901	81.3616
Vp (volumen promedio, m ³)	0.0802	0.8649	2.8855	0.7908	91.4311
Diámetro cuadrático (cm)	11.5060	25.2581	45.9213	10.2030	40.3951
Área basal (m ² ha ⁻¹)	14.6153	30.4573	48.7698	7.7230	25.3567
Volumen (m ³ ha ⁻¹)	148.89	407.11	836.79	149.70	36.77
Edad (años)	13.00	35.80	104.00	20.95	58.50

DE = Desviación estándar; CV = Coeficiente de variación en porcentaje.

Los parámetros de la función de *Yoda* en forma lineal se estimaron con la técnica de mínimos cuadrados ordinarios lineales (MCO-L), y su estructura matemática se representó con la Ecuación (1).

$$\ln(Vp) = \ln(\alpha) + \beta \ln(N) + \varepsilon \quad (1)$$

Donde:

\ln = Función logaritmo natural

α y β = Parámetros para estimar

N = Número de árboles

ε = Término del error [$\varepsilon = iid N(0, \sigma^2)$]

iid = Indica que el error es independiente e idénticamente distribuido

Cuando los parámetros de la función se estimaron con la técnica de regresión frontera estocástica (RFE), la estructura se representó mediante la Ecuación (2).

$$\ln(Vp) = \ln(\alpha) + \beta \ln(N) - u + v \quad (2)$$

Donde el error se divide en: (1) u_i es un término asimétrico que corresponde a un componente del error que da cuenta de la ineficiencia técnica en los datos observados y se asume que se distribuye independientemente de v_i y de los regresores; (2) v_i es un componente del error asociado con la medición de las observaciones individuales, se asume como una perturbación simétrica distribuida

independientemente de u_i , recoge las variaciones aleatorias debidas a factores como errores aleatorios, errores en la observación y de medición de los datos, se distribuye como $v=iid N(0, \sigma_v^2)$ (Bi, 2004; Comeau *et al.*, 2010; Salas-Eljatib y Weiskittel, 2018; Tian *et al.*, 2021; Long *et al.*, 2022).

Con esos supuestos se seleccionan distribuciones estadísticas para u_i que tiendan para un solo lado, tal como las modalidades de RFE: modelo seminormal (MSN) y modelo normal exponencial (MNE). Cuando el valor de la ineficiencia técnica u_i se asume como cero, entonces el modelo $iid N+(0, \sigma_u^2)$ corresponde al MSN; si los u_i ($i=1\dots, N$) son variables aleatorias no negativas $iid N+(0, \sigma_u^2)$, entonces se define como el modelo normal-truncado en cero (MNT) (Bi, 2004; Zhang *et al.*, 2013; Tian *et al.*, 2021). Para la estimación de los parámetros con RFE, se evaluaron las modalidades de MSN, MNT y MNE.

El ajuste de la ecuación de *Yoda* con MCO-L se realizó con el programa R (R Core Team, 2022) versión 4.2. Para ajustar la misma función con la técnica de RFE mediante máxima verosimilitud, se utilizó el paquete *Frontier* del programa R.

Después del ajuste por MCO-L, se aplicaron cuatro criterios teóricos básicos con fundamento estadístico para aumentar el valor del intercepto (parámetro α), los cuales están referidos en Comeau *et al.* (2010), Burkhart y Tomé (2012) y Tamarit-Urias *et al.* (2020), los cuales fueron adaptados para la función de *Yoda*. Así se mantuvo fijo el valor del parámetro de la pendiente (β), y con los valores aumentados del intercepto ($\alpha_{m\acute{a}x}$) se desplazó la línea promedio hacia el límite superior de los valores observados para obtener las líneas de densidad máxima. Las expresiones que estiman los valores de $\alpha_{m\acute{a}x}$ para cada criterio fueron:

$$\text{Criterio A: } \alpha_{\text{máx}} = (1.96 * \sigma^2) + \alpha \quad (3)$$

$$\text{Criterio B: } \alpha_{\text{máx}} = \text{Ln}(Vp_+) + \beta * \text{Ln}(N_+) \quad (4)$$

$$\text{Criterio C: } \alpha_{\text{máx}} = \bar{x}_{3RM} + \alpha \quad (5)$$

$$\text{Criterio D: } \alpha_{\text{máx}} = LSIC \quad (6)$$

Donde:

σ^2 = Varianza del error

Vp_+ y N_+ = Valores de volumen promedio por árbol y densidad para el sitio que tiene el mayor índice de densidad del Rodal de *Yoda*

\bar{x}_{3RM} = Promedio de los tres residuales mayores

$LSIC$ = Valor del límite superior del intervalo de confianza para el parámetro α calculado a 95 % de confiabilidad.

En una primera etapa, en la metodología de MCO-L se analizó la significancia de los parámetros, los errores estándar y la varianza del error. En la metodología de RFE, con base en Santiago-García *et al.* (2013) y Quiñonez-Barraza *et al.* (2018), se comparó la calidad de ajuste entre las modalidades MSN, MNT y MNE a través de los estadísticos logaritmo de verosimilitud (*logLik*), criterio de información de Akaike (*AIC*) y criterio de Schwarz (*SchC*), además de las varianzas de los componentes del error (σ_v^2 y σ_u^2), la razón de varianzas de los componentes del error (λ) y la

varianza total (σ^2) (Bi, 2004; Comeau *et al.*, 2010). También se examinó la significancia de los parámetros.

En una segunda etapa, con base en Salas-Eljatib y Weiskittel (2018), se realizó un análisis gráfico comparativo entre las líneas de autoaclareo que generó cada una de las técnicas (entre criterios para aumentar α con MCO-L y entre las modalidades de ajuste con RFE). Además, se inspeccionó y contrastó la ubicación y trayectorias de las líneas de autoaclareo, con respecto a los datos observados.

En la selección de la mejor técnica de ajuste, se privilegió un balance entre criterios estadísticos (marco teórico conceptual y estadísticos de bondad de ajuste) y razones biológicas de crecimiento.

Con los valores de los parámetros de la mejor técnica de ajuste, se delimitó la línea de autoaclareo para *P. montezumae* en la zona de estudio, la cual corresponde al volumen promedio por árbol que como máximo puede soportar una hectárea sin autoaclareo, y equivale a 100 % del índice de densidad del rodal de *Yoda* (*IDRY*) (Santiago-García *et al.*, 2013). Para determinar el *IDRY* se definió una densidad de referencia (Nr) de 100 árboles ha^{-1} . El *IDRY* se genera a partir de manipular algebraicamente la ecuación linealizada de *Yoda* y aplicar la función exponencial (e) como la inversa del logaritmo natural; la estructura matemática no lineal de este índice se representa con la Ecuación (7).

$$IDRY = Vp (Nr/N)^{-\beta} \quad (7)$$

El *IDRY* máximo ($IDRY_{m\acute{a}x}$) se estimó con la Ecuación (8).

$$IDRY_{m\acute{a}x} = e^{(\alpha - \beta \ln(Nr))} \quad (8)$$

Donde los componentes de ambas expresiones fueron indicados previamente.

La GMD se construyó considerando como referencia la línea de autoaclareo para determinar las cuatro zonas de crecimiento de *Langsaeter* (1941) que conforman fajas de densidades relativas y que corresponden a etapas particulares de desarrollo del rodal (Pretzsch, 2009). Estas zonas se obtuvieron mediante líneas teóricas que corresponden a porcentajes del $IDRY_{máx}$. Con base en Tamarit-Urias *et al.* (2020), la zona 1 de subutilización del sitio correspondió a 25 %; la zona 2, que es de transición, se definió entre 25 y 35 %; la zona 3, de máximo crecimiento en volumen por hectárea, se localizó de 35 a 70 % y la zona 4, correspondiente a la de autoaclareo, se ubicó en el intervalo de 70 a 100 %.

El valor del parámetro de la pendiente (β) obtenido con la técnica de ajuste seleccionada, se contrastó con el valor teórico constante de -1.5 establecido por Yoda *et al.* (1963) mediante las pruebas de razón de verosimilitud y de *Wald* (Santiago-García *et al.*, 2013; Aiguó *et al.*, 2019), también se comparó con los valores registrados para otros taxones.

Resultados y Discusión

El ajuste estadístico de la función de Yoda por MCO-L y por RFE en las tres modalidades evaluadas se presenta en el Cuadro 2. Todos los parámetros y los componentes del error, excepto σ^2_u para RFE-MNT, fueron significativos ($p < 0.05$), los valores de los errores estándar fueron bajos. En el Cuadro 3 se consignan los valores de los estadísticos de bondad de ajuste, tanto para MCO-L como para las modalidades de la técnica de RFE; los mejores valores en la varianza total, en la

razón de varianzas, en el *AIC* y *SchC* los presentó la RFE-MSN; el valor del *logLik*, para esta modalidad, ocupó el segundo mejor lugar, también presentó los menores valores del error estándar en los parámetros α y β . Por su parte, la varianza del error con la técnica de MCO-L fue de 0.32703.

Cuadro 2. Valores de los parámetros y estadísticos de bondad de ajuste obtenidos por las técnicas de mínimos cuadrados ordinarios lineales (MCO-L) y las modalidades de regresión frontera estocástica (RFE).

Técnica de ajuste	Parámetro	Estimador	Error estándar	Valor de <i>t</i>	Significancia
MCO-L	α	7.555390	0.307560	24.57	<0.0001
	β	-1.246920	0.046780	-26.66	<0.0001
RFE-MSN	α	8.051316	0.258740	31.12	<0.0001
	β	-1.264345	0.036818	-34.34	<0.0001
	σ_v^2	0.142798	0.041478	3.44	0.0006
	σ_u^2	0.479931	0.064110	7.49	<0.0001
RFE-MNT	α	8.004173	0.315643	25.36	<0.0001
	β	-1.261065	0.038616	-32.66	<0.0001
	σ_v^2	0.153761	0.058794	2.62	0.0089
	σ_u^2	0.533216	0.278571	1.91	0.0556
RFE-MNE	α	7.580781	0.398343	19.03	<0.0001
	β	-1.201906	0.060889	-19.74	<0.0001
	σ_v^2	0.358133	0.089226	4.01	<0.0001
	σ_u^2	0.245084	0.072550	3.38	0.0007

Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste para mínimos cuadrados ordinarios lineales (MCO-L) y las modalidades de regresión frontera estocástica (RFE).

Técnica de ajuste	<i>logLik</i>	<i>AIC</i>	<i>SchC</i>	σ^2	λ
MCO-L*	-26.09852	58.19704	65.69647	0.32703	-

RFE-MSN	-21.43774	50.87549	60.87473	0.50072	3.36090
RFE-MNT	-21.40915	52.81829	65.31734	0.55494	3.46783
RFE-MNE	-33.25753	74.51506	84.51430	0.43396	0.68434

logLik = Logaritmo de verosimilitud; *AIC* = Criterio de información de *Akaike*; *SchC* = Criterio de *Schwarz*; σ^2 = Varianza total del error; λ = Razón de varianzas (σ^2_u/σ^2_v).
 *Los valores del coeficiente de determinación (R^2) y de la raíz del cuadrado medio del error (*RCME*) son 0.8898 y 0.3234 m³, respectivamente.

En la Figura 1a se muestra el comportamiento gráfico de las líneas de densidad máxima que generó la técnica de MCO-L combinada con los criterios teóricos para desplazar la línea promedio, cuyos valores calculados para $\alpha_{m\acute{a}x}$ fueron 8.19637, 8.01095, 7.97680 y 8.16660 para los criterios A, B, C y D, respectivamente. En la Figura 1b se observan las líneas de autoaclareo que produjo la técnica de RFE en las modalidades MSN, MNT y MNE.

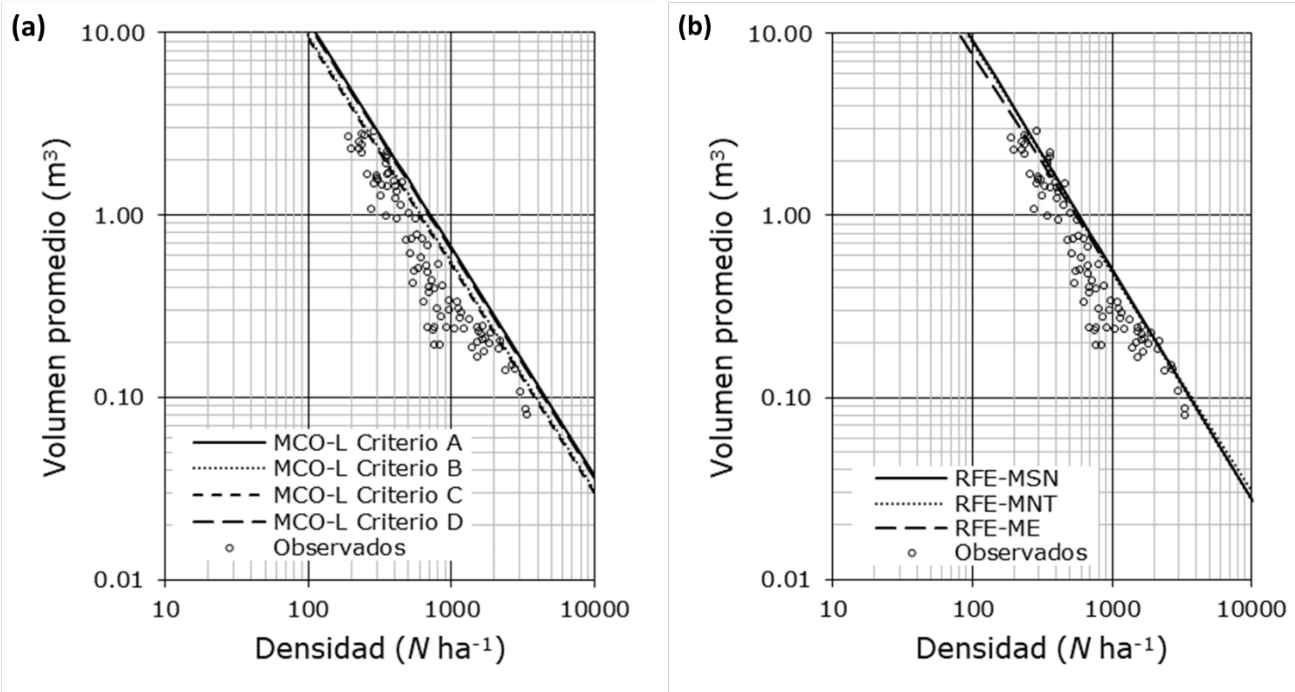


Figura 1. Líneas de autoaclareo obtenidas mediante las técnicas de MCO-L (a) y RFE (b) con respecto a los datos observados.

Con ambas técnicas de ajuste y sus modalidades, se observó que todas las líneas de autoaclareo se ubican en el límite superior de los datos observados, por lo que pueden considerarse *per se* líneas biológicas de densidad máxima (Figura 1). Un análisis visual a mayor detalle evidencia que la técnica MCO-L en combinación con el criterio teórico B, comparativamente con el resto de los criterios, es más consistente y biológicamente razonable, porque la línea de densidad máxima se posiciona de mejor manera en el límite superior (Figura 1a). Metodológicamente, este criterio es robusto, ya que la modificación del intercepto se fundamenta en el sitio con el *IDRY* que tiene el valor más alto (con $Nr=100$ árboles ha^{-1} y $\beta=-1.24692$); situación que hace que la línea de autoaclareo intercepte al punto $Vp-N$ correspondiente al sitio con el mayor *IDRY*, con lo que se cumple que $IDRY/IDRY_{m\acute{a}x}=1$.

La técnica de RFE reproduce líneas de densidad máxima que corresponden a máximos absolutos, por lo que en automático se ubican en la frontera superior. Un análisis comparativo visual de las líneas con RFE evidenció que la modalidad de MSN tiene un patrón superior, porque la línea se posicionó mejor en el límite superior de la frontera de las observaciones (Figura 1b).

La comparación gráfica de las dos técnicas para estimar los parámetros de ajuste (MCO-L con criterio B y RFE-MSN) evidenció que son similares y próximas entre sí (Figura 2a), porque ambas se ubican en forma aceptable en el límite superior de los datos observados. La línea de MCO-L se sitúa ligeramente en la parte más externa de las observaciones debido a que tiene una menor pendiente ($\beta=-1.24692$ para MCO-L vs $\beta=-1.264345$ para RFE-MSN), y un menor intercepto ($\alpha_{m\acute{a}x}=8.010952$ para MCO-L vs $\alpha=8.051316$ para RFE-MSN).

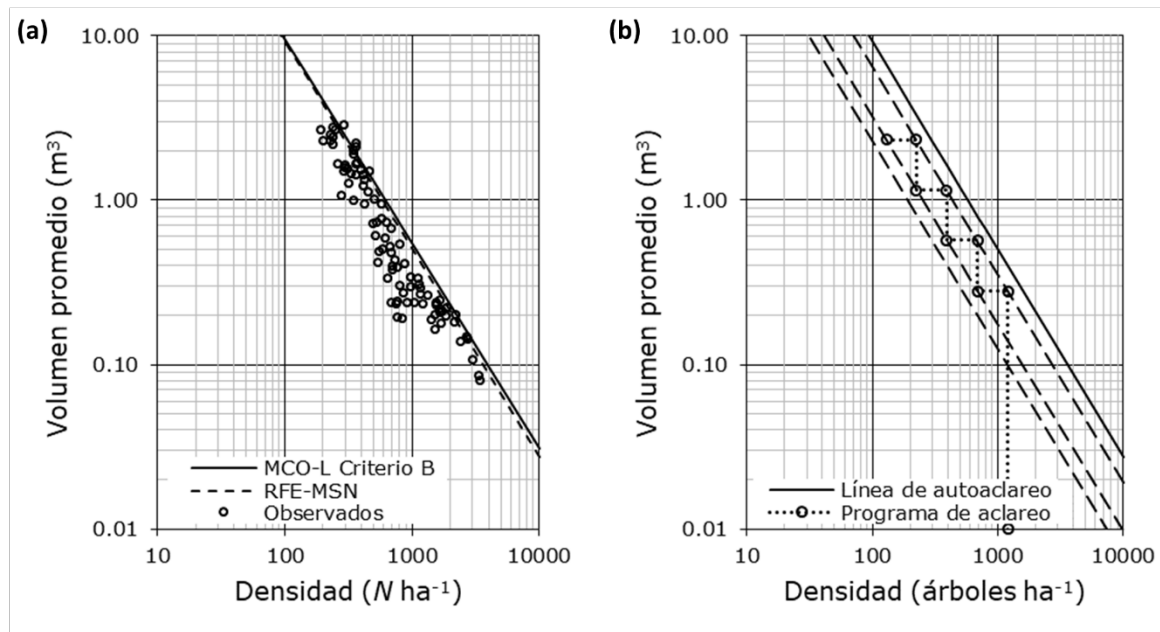


Figura 2. Comparativo de las líneas de autoaclareo obtenidas mediante MCO-L criterio B y RFE-MSN (a), GMD construida para *Pinus montezumae* Lamb. con la función de *Yoda* ajustada por RFE-MSN y prescripción de un programa de aclareos (b).

Ante la similitud referida, se optó por seleccionar a la RFE-MSN debido a que esta técnica posee un marco teórico robusto (Tian *et al.*, 2021; Long *et al.*, 2022) y tiene la ventaja adicional de que permite determinar la línea de autoaclareo de manera directa e inmediata. Al respecto, Bi (2004) refiere que RFE estima valores extremos o “frontera” del conjunto de datos analizados; Comeau *et al.* (2010) agrega que, como proceso estocástico, la frontera misma es considerada como una variable aleatoria en la cual cada dato experimental tiene su propia función frontera, diferente de la función general. El efecto inmediato de utilizarla en alguna función tamaño-densidad como la de *Yoda*, es que en automático mejora la determinación objetiva de la línea de autoaclareo. Por ello, con base en Zhang *et al.* (2005), Kimsey *et al.* (2019) y Tian *et al.* (2021) podría deducirse que RFE, comparativamente, es más directa, eficiente y consistente.

En México, la técnica de estimación de parámetros mediante RFE en la modalidad de MSN ha sido utilizada de manera satisfactoria por Santiago-García *et al.* (2013) para delimitar la línea de autoaclareo con el índice de *Yoda* para *Pinus patula* Schlttdl. & Cham.

Sin embargo, a partir de los resultados gráficos de la línea de autoaclareo estimada con MCO-L se infiere que también es una técnica efectiva. En este sentido, se considera que en posteriores estudios podría utilizarse MCO-L en combinación con los criterios teóricos para desplazar la línea promedio. Así, mediante este tipo de análisis exploratorio para otros taxones, con énfasis en el comportamiento gráfico de las líneas de autoaclareo que reproducen, será posible determinar aquella combinación que mejor represente los datos observados. La técnica de MCO-L es robusta y objetiva para estimar la condición promedio, porque minimiza la suma de cuadrados de los errores (Zhang *et al.*, 2005; Comeau *et al.*, 2010). Adicionalmente, Long *et al.* (2022) señalan que los métodos tradicionales para estimar la línea de autoaclareo, como el criterio B que hace uso del $IDRY_{máx}$ e implícitamente el método de densidad relativa, tienen sustento en la dinámica de crecimiento del rodal e integran criterios biológicos importantes, aspectos que omite la técnica de RFE.

La GMD para rodales de *P. montezumae* se construyó con el ajuste de RFE-MSN (Figura 2b). El $IDRY$ de la línea de crecimiento libre (25 %) se estimó en 2.3 m³, el $IDRY$ para la línea de crecimiento constante (35 %) fue de 3.2 m³, para la línea de inicio de la mortalidad (70 %) el $IDRY$ fue de 6.5 m³ y para la línea de autoaclareo (100 %) de 9.2 m³, que corresponde al $IDRY_{máx}$.

El uso de la GMD se ejemplifica asumiendo un rodal hipotético en el que se parte de una densidad inicial de 1 200 árboles ha⁻¹; a partir de esta condición, se genera un programa de aclareos teórico de tipo sistemático, en el cual la densidad del rodal se debe gestionar en la zona de crecimiento 3 (Figura 2b). La GMD tiene amplia

utilidad para alcanzar diversos objetivos de producción, ya que es posible derivar múltiples escenarios de aclareos y seleccionar el más conveniente para planificar estrategias de manejo de la densidad.

Con base en las pruebas de razón de verosimilitud y de *Wald* (con $\alpha=0.05$), se determinó que el valor de la pendiente de -1.264345 mediante RFE-MSN, es estadísticamente diferente del valor teórico constante propuesto por Yoda *et al.* (1963) de -1.5 ($P<0.0001$); el intervalo de confianza al 95 % para β fluctuó de -1.3428 a -1.1674 y no incluyó a -1.5. Este resultado coincide con lo registrado por Santiago-García *et al.* (2013), quienes, para rodales de *P. patula* en Hidalgo, México, bajo la misma técnica y modalidad de ajuste, estimaron un valor para β de -1.1999, en donde el intervalo respectivo tampoco incluyó a -1.5.

Otros estudios para diferentes especies forestales de distintas ecorregiones de México y del mundo, también citan valores diferentes de -1.5 (Cuadro 4). Para algunos casos, se ha observado que los coeficientes de la pendiente son significativamente menores al valor teórico, lo que sugiere que las masas forestales de esas especies crecen a tasas mayores porque se ubican en sitios cuya capacidad productiva es superior.

Cuadro 4. Comparativo del valor del parámetro de la pendiente (β) de la ecuación de Yoda para *Pinus montezumae* Lamb. con respecto a otras especies.

Especie	Localidad/país	Valor de β	Referencia documental
<i>Pinus montezumae</i> Lamb.	Teziutlán, Puebla, México	-1.264345	Presente estudio
<i>Pinus patula</i> Schtdl. & Cham.	Zacualtipán, Hidalgo, México	-1.199907	Santiago-García <i>et al.</i> (2013)
<i>Pinus halepensis</i> Mill.	Cataluña, España	-1.77700	Brunet-Navarro <i>et al.</i> (2016)
<i>Pinus nigra</i> J. F. Arnold	Cataluña, España	-1.78700	Brunet-Navarro <i>et al.</i> (2016)
<i>Pinus sylvestris</i> L.	Cataluña, España	-1.64700	Brunet-Navarro <i>et al.</i> (2016)
<i>Pinus uncinata</i> Raymond ex A. DC.	Cataluña, España	-1.66500	Brunet-Navarro <i>et al.</i> (2016)
<i>Picea mariana</i> (Mill.) Britton, Sterns & Poggenb.	Newfoundland, Canadá	-1.618000	Newton y Weetman (1993)
<i>Abies balsamea</i> (L.) Mill.	New Brunswick, Canadá	-1.339954	Penner <i>et al.</i> (2006)
<i>Abies balsamea</i> (L.) Mill.	Newfoundland, Canadá	-1.282000	McCarthy y Weetman (2007)
<i>Abies balsamea</i> (L.) Mill.	New Brunswick, Canadá	-1.403980	Swift <i>et al.</i> (2007)

<i>Cunninghamia lanceolata</i> (Lamb.) Hook.	Fujian, China	-1.470000	Zhang <i>et al.</i> (2015)
<i>Larix decidua</i> Mill.	Maine, EE. UU.	-1.774000	Gilmore y Briggs (2003)
<i>Kandelia obovata</i> Sheue, H. Y. Liu & J. Yong	Okinawa, Japón	-1.585000	Kamara <i>et al.</i> (2012)

En este contexto, la evidencia conduce a reafirmar el argumento de que el valor de β no siempre está cerca del valor teórico y puede diferir significativamente entre especies (Comeau *et al.*, 2010; Santiago-García *et al.*, 2013; Brunet-Navarro *et al.*, 2016). Tal comportamiento se explica, en parte, porque distintas poblaciones presentan diferentes tasas de mortalidad en función de su densidad, hábitos de crecimiento, tolerancia a la sombra, factores de la productividad del sitio y edad de la masa (Weller, 1987; Bi, 2004). Otros factores que influyen para que β difiera de $-3/2$ son la especie, el tamaño y forma de seleccionar la muestra, las ecuaciones usadas para estimar el volumen del árbol, la técnica y el algoritmo de regresión implementado, y si efectivamente el conjunto de datos procesados proviene de rodales que representen la combinación máxima de tamaño-densidad como para que se manifieste el fenómeno de autoaclareo (Puntieri, 1993; Bi, 2004; McCarthy y Weetman, 2007). Lo anterior ratifica el postulado de que se debe desarrollar una alometría específica para cada especie de interés y ecorregión, para con ello evitar que se presenten errores al estimar y controlar la densidad (Osawa y Allen, 1993; Tamarit-Urias *et al.*, 2020; Long *et al.*, 2022).

Conclusiones

En este estudio, se dilucidó que la línea de autoaclareo con la ecuación de *Yoda* para rodales de *Pinus montezumae* de Puebla, México puede determinarse como un

máximo biológico absoluto y con propiedades estadísticas más eficientes mediante la técnica de regresión frontera estocástica en su modalidad de modelo seminormal. Efectos similares también se obtienen si la técnica de mínimos cuadrados ordinarios lineales se combina con los criterios teóricos para aumentar el valor del intercepto y así desplazar la línea promedio. En particular, el criterio que se basa en el sitio con el más alto valor del *IDRY* produce efectos muy parecidos al de RFE-MSN. Se determinó la línea de autoclareo y el índice de densidad del rodal máximo en forma puntual; ambos atributos son fundamentales para evaluar el nivel de densidad y competencia de rodales.

La GMD construida es una herramienta silvícola importante, específica para este taxón en una ecorregión en particular; la GMD junto con los parámetros de densidad referidos son elementos con base biológica y sustento científico. El valor del parámetro de la pendiente de la ecuación de *Yoda* para la especie estudiada fue estadísticamente diferente del valor teórico de -1.5; el comparativo de este valor entre diferentes especies demostró y ratificó el postulado de que varía significativamente entre taxones con respecto al valor teórico, por lo que se reafirma la premisa de que los estudios orientados a evaluar la competencia, definir la línea de densidad máxima y construir guías de densidad, deben de realizarse con una alometría específica e independiente.

Agradecimientos

A los revisores anónimos que contribuyeron a mejorar esta versión final.

Conflicto de intereses

El autor declara no haber participado en el proceso editorial del manuscrito.

Contribución por autor

Juan Carlos Tamarit-Urias: conceptualización y organización de la investigación, conformación de bases de datos, análisis estadístico, escritura y corrección del documento.

Referencias

Aiguo, D., F. Lihua and Z. Jianguo. 2019. Self-thinning rules at Chinese fir (*Cunninghamia lanceolata*) plantations—based on a permanent density trial in southern China. *Journal of Resources and Ecology* 10(3):315-323. Doi: 10.5814/j.issn.1674-764x.2019.03.010.

Bi, H. 2004. Stochastic frontier analysis of a classic self-thinning experiment. *Austral Ecology A Journal of ecology in the Southern Hemisphere* 29(4):408-417. Doi: 10.1111/j.1442-9993.2004.01379.x.

Brunet-Navarro, P., F. J. Sterck, J. Vayreda, J. Martinez-Vilalta and G. M. J. Mohren. 2016. Self-thinning in four pine species: an evaluation of potential climate impacts. *Annals of Forest Science* 73(4):1025-1034. Doi: 10.1007/s13595-016-0585-y.

Burkhardt, H. E. and M. Tomé. 2012. *Modeling forest trees and stands*. Springer. New York, NY, United States of America. 458 p.

Camacho-Montoya, J. A., W. Santiago-García, G. Rodríguez-Ortiz, P. Antúnez, E. Santiago-García y M. E. Suárez-Mota. 2018. Autoaclareo y manejo de la densidad en rodales coetáneos de *Pinus patula* Schiede ex Schlechtdl. & Cham. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 9(49):188-212. Doi: 10.29298/rmcf.v9i49.162.

Comeau, P. G., M. White, G. Kerr and S. E. Hale. 2010. Maximum density-size relationships for Sitka spruce and coastal Douglas-fir in Britain and Canada. *Forestry: An International Journal of Forest Research* 83(5):461-468. Doi: 10.1093/forestry/cpq028.

Comisión Nacional Forestal (Conafor). 2019. Paquetes Tecnológicos *Pinus montezumae* Lamb. <http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/13/971Pinus%20montezumae.pdf>. (25 de noviembre de 2022).

Fu, L. H., J. G. Zhang, A. G. Duan, H. G. Sun and C. Y. He. 2008. Review of studies on maximum size-density rules. *Chinese Journal of Plant Ecology* 32(2):501-511. Doi: 10.3773/j.issn.1005-264x.2008.02.030.

Gavrikov, V. L. 2015. An application of bole surface growth model: a transitional status of '-3/2' rule. *European Journal of Forest Research* 134(4):715-724. Doi: 10.1007/s10342-015-0885-z.

Ge, F., W. Zeng, W. Ma and J. Meng. 2017. Does the slope of the self-thinning line remain a constant value across different site qualities? -An implication for plantation density management. *Forests* 8(10):355-367. Doi: 10.3390/f8100355.

Gilmore, D. W. and R. D. Briggs. 2003. A stocking guide for European larch in eastern North America. *Northern Journal of Applied Forestry* 20(1):34-38. Doi: 10.1093/njaf/20.1.34.

Kamara, M., R. Deshar, S. Sharma, Md. Kamruzzaman and A. Hagihara. 2012. The self-thinning exponent in overcrowded stands of the mangrove, *Kandelia obovata*, on Okinawa Island, Japan. *Journal of Oceanography* 68(6):851-856. Doi: 10.1007/s10872-012-0135-7.

Kimsey Jr., M. J., T. M. Shaw and M. D. Coleman. 2019. Site sensitive maximum stand density index models for mixed conifer stands across the Inland Northwest,

USA. Forest Ecology and Management 433:396-404. Doi: 10.1016/j.foreco.2018.11.013.

Langsaeter, A. 1941. Om tynning i enaldret gran-og furuskog. Meddelelser fra Det norske skogforsøksvesen 8:13-216. <https://nibio.brage.unit.no/nibio-xmlui/handle/11250/2988571?show=full>. (4 de noviembre de 2022).

Lee, D. and J. Choi. 2019. Evaluating maximum stand density and size-density relationships based on the competition density rule in Korean pines and Japanese larch. Forest Ecology and Management 446:204-213. Doi: 10.1016/j.foreco.2019.05.017.

Long, S., S. Zeng, Z. Shi and S. Yang. 2022. Estimating the self-thinning boundary line for oak mixed forests in central China by using stochastic frontier analysis and a proposed variable density model. Ecology and Evolution 12(9):e9064. Doi: 10.1002/ece3.9064.

Marchi, M. 2019. Nonlinear versus linearised model on stand density model fitting and stand density index calculation: analysis of coefficients estimation via simulation. Journal of Forestry Research 30(5):1595-1602. Doi: 10.1007/s11676-019-00967-0.

McCarthy, J. W. and G. Weetman. 2007. Self-thinning dynamics in a balsam fir (*Abies balsamea* (L.) Mill.) insect-mediated boreal forest chronosequence. Forest Ecology and Management 241(1-3):295-309. Doi: 10.1016/j.foreco.2007.01.001.

Newton, P. F. and G. F. Weetman. 1993. Stand density management diagrams and their development and utility in black spruce management. The Forestry Chronicle 69(4):421-430. Doi: 10.5558/tfc69421-4.

Newton, P. F. 2021. Croplanner: A stand density management decision-support software suite for addressing volumetric yield, end-product and ecosystem service

objectives when managing boreal conifers. *Forests* 12(4):448. Doi: 10.3390/f12040448.

Osawa, A. and R. B. Allen. 1993. Allometric theory explains self-thinning relationships of mountain beech and red pine. *Ecology* 74(4):1020-1032. Doi: 10.2307/1940472.

Penner, M., D. E. Swift, R. Gagnon and J. Brisette. 2006. A stand density management diagram for balsam fir in New Brunswick. *The Forestry Chronicle* 82(5):700-711. Doi: 10.5558/tfc82700-5.

Pretzsch, H. 2009. *Forest dynamics, growth and yield. From measurement to model.* Springer-Verlag Berlin. Heidelberg, BW, Germany. 664 p.

Puntieri, J. G. 1993. The self-thinning rule: bibliography revision. *Preslia Praha* 65(3):243-267. <https://www.preslia.cz/article/pdf?id=11447>. (11 noviembre de 2022).

Quiñonez-Barraza, G., J. C. Tamarit-Urias, M. Martínez-Salvador, X. García-Cuevas, H. M. De los Santos-Posadas and W. Santiago-García. 2018. Maximum density and density management diagram for mixed-species forests in Durango, Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 24(1):73-90. Doi: 10.5154/r.rchscfa.2017.09.056.

R Core Team. 2022. *The R Project for Statistical Computing (Version 4.2.3).* Vienna, Austria. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.r-project.org/>. (11 de noviembre de 2022).

Rodríguez-Acosta, M. y B. Arteaga-Martínez. 2005. Índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen, en los estados de Veracruz y Puebla, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 11(1):39-44. <https://www.redalyc.org/pdf/629/62911106.pdf>. (18 noviembre de 2022).

Salas-Eljatib, C. and A. R. Weiskittel. 2018. Evaluation of modeling strategies for assessing self-thinning behavior and carrying capacity. *Ecology and Evolution* 8(22):10768-10779. Doi: 10.1002/ece3.4525.

Santiago-García, W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. R. Valdez-Lazalde, D. H. Del Valle-Paniagua y J. J. Corral-Rivas. 2013. Auto-aclareo y guías de densidad para *Pinus patula* mediante el enfoque de regresión de frontera estocástica. *Agrociencia* 47(1):75-89. <http://www.scielo.org.mx/pdf/agro/v47n1/v47n1a7.pdf>. (29 de julio de 2022).

Schulze, E. D., E. Beck, N. Buchmann, S. Clemens, K. Müller-Hohenstein and M. Scherer-Lorenzen. 2019. *Plant ecology*. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg, BW, Germany. 926 p.

Solomon, D. S. and L. Zhang. 2002. Maximum size-density relationships for mixed softwoods in the northeastern USA. *Forest Ecology and Management* 155(1-3):163-170. Doi: 10.1016/S0378-1127(01)00556-4.

Sun, H. G., J. G. Zhang and A. G. Duan. 2010. A comparison of selecting data points and fitting coefficients methods for estimating self-thinning boundary line. *Chinese Journal of Plant Ecology* 34(4):409-417. Doi: 10.3773/j.issn.1005-264x.2010.04.006.

Swift, E., M. Penner, R. Gagnon and J. Knox. 2007. A stand density management diagram for spruce–balsam fir mixtures in New Brunswick. *The Forestry Chronicle* 83(2):187-197. Doi: 10.5558/tfc83187-2.

Tamarit-Urias, J. C., G. Quiñonez-Barraza, H. M. De los Santos-Posadas, A. Castañeda-Mendoza and W. Santiago-García. 2019. A stand density diagram for *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. in Puebla, Mexico. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 10(51):157-181. Doi: 10.29298/rmcf.v10i51.223.

Tamarit-Urias, J. C., G. Quiñonez-Barraza y J. Hernández-Ramos. 2020. Aspectos metodológicos para generar diagramas de manejo de la densidad de rodales con base en el índice de Reineke. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 11(61):4-26. Doi: 10.29298/rmcf.v11i61.728.

- Tamarit U., J. C., M. Rodríguez A. e I. Lerma S. 2022. SIIMADER: Sistema informático Inifap para manejar la densidad de rodales. *e-Cucba* 9(17):147-155. Doi: 10.32870/ecucba.vi17.223.
- Tian, D., H. Bi, X. Jin and F. Li. 2021. Stochastic frontiers or regression quantiles for estimating the self-thinning surface in higher dimensions? *Journal of Forestry Research* 32:1515-1533. Doi: 10.1007/s11676-020-01196-6.
- VanderSchaaf, C. L. and H. E. Burkhart. 2007. Comparison of methods to estimate Reineke's maximum size-density relationship species boundary line slope. *Forest Science* 53(3):435-442. Doi: 10.1093/forestscience/53.3.435.
- Weiskittel, A. R., D. W. Hann, J. A. Kershaw and J. K. Vanclay. 2011. *Forest growth and yield modeling*. Jhon Wiley & Sons. Ltd. Chichester, WS, United Kingdom. 415 p.
- Weller, D. E. 1987. A reevaluation of the $-3/2$ power rule of plant self-thinning. *Ecological Monographs* 57(1):23-43. Doi: 10.2307/1942637.
- Xue, L., X. Hou, Q. Li and Y. Hao. 2015. Self-thinning lines and allometric relation in Chinese fir (*Cunninghamia lanceolata*) stands. *Journal of Forestry Research* 26(2):281-290. Doi: 10.1007/s11676-015-0059-3.
- Yoda, K., T. Kira, H. Ogawa and K. Hozumi. 1963. Self-thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions (Intraspecific competition among higher plants. XI). *Journal of Biology* 14:107-129. [https://refhub.elsevier.com/S0378-1127\(21\)01097-5/h0445](https://refhub.elsevier.com/S0378-1127(21)01097-5/h0445). (29 de julio de 2022).
- Zeide, B. 1987. Analysis of the $3/2$ power law of self-thinning. *Forest Science* 33(2):517-537. Doi: 10.1093/forestscience/33.2.517.
- Zhang, L., H. Bi, J. H. Gove and L. S. Heath. 2005. A comparison of alternative methods for estimating the self-thinning boundary line. *Canadian Journal of Forest Research* 35:1507-1514. Doi: 10.1139/x05-070.

Zhang, J., W. W. Oliver and R. F. Powers. 2013. Reevaluating the self-thinning boundary line for ponderosa pine (*Pinus ponderosa*) forests. Canadian Journal of Forest Research 43(10):963-971. Doi: 10.1139/cjfr-2013-0133.

Zhang, X., J. Zhang and A. Duan. 2015. A hierarchical bayesian model to predict self-thinning line for chinese fir in southern China. Plos One 10(10):e0139788. Doi: 10.1371/journal.pone.0139788.



Todos los textos publicados por la **Revista Mexicana de Ciencias Forestales** –sin excepción– se distribuyen amparados bajo la licencia *Creative Commons 4.0 [Atribución-No Comercial \(CC BY-NC 4.0 Internacional\)](#)*, que permite a terceros utilizar lo publicado siempre que mencionen la autoría del trabajo y a la primera publicación en esta revista.