



DOI: [10.29298/rmcf.v13i73.1187](https://doi.org/10.29298/rmcf.v13i73.1187)

Artículo

## Modelación de las estructuras diamétricas en bosques naturales de Pueblo Nuevo, Durango

## Modelling diameter distribution of natural forests in *Pueblo Nuevo*, Durango State

Alondra Anahi Vega<sup>1</sup>, Sacramento Corral Rivas<sup>1\*</sup>, José Javier Corral Rivas<sup>2</sup>,  
Ulises Diéguez Aranda<sup>3</sup>

Fecha de recepción/Reception date: 13 de julio de 2021

Fecha de aceptación/Acceptance date: 18 de julio de 2022

<sup>1</sup>Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico de El Salto. México.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias Forestales, Universidad Juárez del Estado de Durango. México.

<sup>3</sup>Departamento de Ingeniería Agroforestal. Escuela Politécnica Superior de Lugo. Universidad de Santiago de Compostela. España.

\*Autor para correspondencia; correo-e: [sacramento.cr@salto.tecnm.mx](mailto:sacramento.cr@salto.tecnm.mx)

\*Corresponding author; e-mail: [sacramento.cr@salto.tecnm.mx](mailto:sacramento.cr@salto.tecnm.mx)

### Resumen

Las distribuciones diamétricas son un factor importante en la caracterización del rodal, ya que el diámetro, generalmente, está correlacionado con otras variables de interés como la altura, volumen, biomasa, etcétera, esto permite conocer el tipo de productos que pueden obtenerse del bosque. El objetivo de la presente investigación fue desarrollar una estrategia para ajustar las FDP *Weibull*, *Beta* y *S<sub>B</sub> Johnson*, así como reconstruir (modelación) la distribución diamétrica futura con el método de recuperación de parámetros. En una primera etapa, se estudió comparativamente la calidad de ajuste de tres funciones de distribución de probabilidad (FDP: *Weibull*, *S<sub>B</sub> Johnson* y *Beta*) mediante los métodos de momentos y máxima verosimilitud para recuperar los parámetros y describir la distribución diamétrica de 2 252 parcelas temporales de muestreo ubicadas en bosques naturales de Pueblo Nuevo, Durango, México. En general, los mejores resultados en términos de precisión y parsimonia en la etapa de ajuste, evaluados mediante el sesgo medio y la Raíz del Error Medio Cuadrático, se obtuvieron con la FDP *Weibull* ajustada con el método de los momentos; mientras que las distribuciones *S<sub>B</sub> Johnson* y *Beta* se ubicaron en segundo y tercer lugar, respectivamente. Por tanto, la FDP *Weibull* biparamétrica fue seleccionada para modelar las distribuciones diamétricas de los rodales estudiados. La técnica de la recuperación de parámetros evidenció que 62 % de las parcelas modeladas siguen una distribución teórica tipo *Weibull* con 20 % de nivel de significancia en la prueba de *Kolmogorov-Smirnov*.

**Palabras clave:** Distribución diamétrica, función *Weibull* biparamétrica, masas mixtas, método de momentos, recuperación de parámetros, sitios de muestreo.

### Abstract

Diameter distributions are an important factor in stand characterization because the diameter is generally correlated with other variables such height, volume, and biomass, and this makes it possible to know what kind products can be harvested from forests. The objective of this research was to develop a strategy to fit the Weibull, Beta and SB Johnson PDFs and reconstruct (modeling) the future diameter distribution with the parameter recovery method. In the first phase, the goodness-of-fit of three probability distribution functions, or PDFs, (Weibull, Johnson's SB, and Beta) was evaluated using the moments and the maximum likelihood methods to estimate the distribution parameters of 2 252 temporary sampling plots distributed in natural forests in Pueblo Nuevo, Durango, Mexico. In general, the best results in terms of accuracy and parsimony during the

model fitting evaluated with the average bias and the root mean square error were obtained with Weibull's PDF, fitted with the moments method was the best, while Johnson's SB and Beta were ranked in second and third position, respectively. Therefore, the two-parameter Weibull's PDF was selected to describe the diameter distributions of the studied forest stands. The parameter recovery method suggested that 62 % of evaluated sampling plots followed a Weibull distribution with a significance level of 20 % in the Kolmogorov-Smirnov test.

**Key words:** Diametric distribution, two-parameter Weibull function, mixed stands, moments method, parameter recovery, sampling plots.

## Introducción

Los bosques naturales de clima templado frío del estado de Durango se ubican en la Sierra Madre Occidental (SMO), ocupan una extensa franja territorial que cubre casi medio estado desde el noroeste hasta el sureste, y han aportado en promedio 30.2 % (2.5 millones de m<sup>3</sup>) del total de la producción maderable en México durante los años 2017 y 2018 (Semarnat, 2021). De acuerdo a González-Elizondo *et al.* (2012), en estos bosques se registran 21 especies del género *Pinus*, que representan aproximadamente 20 % de todos los taxones de pino existentes en el mundo y 43 taxa de *Quercus*. En menor proporción, se presentan especies de *Cupressus*, *Juniperus*, *Fraxinus*, *Arbutus*, *Abies*, *Pseudtsuga* y *Alnus*. La mayoría de las masas forestales corresponden a una estructura irregular, con una mezcla de taxa de *Pinus* y *Quercus*, principalmente.

El manejo forestal sustentable requiere información referente a la distribución del número de árboles por clase diamétrica del rodal, la cual es necesaria para predecir el volumen y su distribución por tipo de productos. Además, provee información sobre la estabilidad y estructura del rodal, características útiles en la prescripción de tratamientos silvícolas (Gorgoso-Varela *et al.*, 2020).

El uso de las funciones de densidad de probabilidad (FDP) para estimar el número de árboles por clase diamétrica, junto con la medición de algunas variables del rodal (altura dominante, altura media, área basal, etcétera), son de utilidad para reducir

los costos de los inventarios forestales y mejorar las predicciones de los modelos de crecimiento existentes. Algunas FDP han sido adecuadamente usadas para describir y predecir la estructura diamétrica de rodales forestales: *Beta*, *Gamma*, *Normal*, *Weibull*, *S<sub>B</sub> Johnson* y en años recientes, *Logit-Logistic* (Ogana, 2020). Ahora bien, si se considera que en estas funciones se usan diferentes técnicas de estimación de parámetros, diversos estadísticos para medir la bondad de ajuste y distintos datos, es muy probable que todo ello haya contribuido a diferentes conclusiones. Por tanto, no hay una razón teórica por la que deba existir una sola FDP para todas las situaciones posibles (Wang y Rennolls, 2005).

El propósito de modelar con precisión la distribución diamétrica del rodal, es estimar los parámetros de la FDP que determina la frecuencia por clase de diámetro en un momento específico de tiempo (edad o un año en particular). Por lo tanto, los parámetros de la FDP pueden estimarse por dos métodos: (i) en forma explícita mediante la predicción de parámetros, por ejemplo, a partir de modelos lineales; y (ii) con la técnica indirecta de recuperación de parámetros, la cual no predice directamente los parámetros de la FDP, sino que las funciones estiman parámetros que están directamente relacionados con la distribución, por ejemplo, momentos centrales, no centrales o un conjunto de percentiles (Hyink y Moser, 1983).

En la actualidad, existen estudios que comparan la precisión lograda con los métodos de predicción y recuperación de parámetros (Maldonado y Návar, 2002; Cao, 2004; Palahí *et al.*, 2006; Jiang y Brooks, 2009); sin embargo, se han desarrollado en plantaciones y masas forestales con una o dos especies. Por ello, para los bosques naturales de la Sierra Madre Occidental donde existe una mezcla alta de especies son escasos los trabajos citados (Corral-Rivas *et al.*, 2015); de ahí la importancia de estudiar las metodologías para evaluar diferentes alternativas de modelación implícita del crecimiento y rendimiento en volumen por unidad de superficie en los bosques naturales del suroeste de Durango, México.

El objetivo de la contribución fue desarrollar una estrategia para ajustar las FDP *Weibull*, *Beta* y *S<sub>B</sub> Johnson*, además de reconstruir (modelación) la distribución diamétrica futura con el método de recuperación de parámetros.

## **Materiales y Métodos**

### **Área de estudio**

El área de estudio fue el ejido La Victoria, localizado al suroeste del estado de Durango, México, entre las coordenadas geográficas 105°25'39.465" longitud oeste y 23°43'53.022" latitud norte. La altura sobre el nivel del mar fluctúa entre 2 400 y 2 850 m. El clima predominante es templado semifrío, con lluvias en verano. La precipitación media anual varía de 900 a 1 200 mm, y la temperatura media anual varía de 5 a 18 °C (García, 2004). Los bosques están constituidos por especies de los géneros *Pinus*, *Quercus*, *Juniperus*, *Cupressus*, *Pseudotsuga*, *Arbutus* y *Alnus* que forman estructuras mixtas e irregulares.

### **Datos**

Los datos provinieron de 2 252 sitios temporales de muestreo de forma circular de 0.10 ha ubicados en el ejido La Victoria, municipio Pueblo Nuevo, Durango, y obtenidos en 2017 mediante un diseño de muestreo sistemático estratificado, durante el inventario de manejo forestal maderable. Se cubrió una superficie de 10 876 ha divididas en 518 unidades de manejo (rodales). En la base de datos se registraron ocho especies de coníferas: *Pinus cooperi* C. E. Blanco, *P. durangensis* Martínez, *P. leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham., *P. teocote* Schied. ex Schltdl. & Cham., *P. engelmannii* Carrière, *P. strobiformis* Engelm., *P. herrerae* Martínez y *Juniperus deppeana* Steud.; y ocho de latifoliadas: *Alnus acuminata* Kunth, *Arbutus bicolor* S. González, M. González & P. D. Sørensen, *Quercus durifolia* Seemen ex Loes., *Q. sideroxylo* Bonpl., *Q. obtusata* Bonpl., *Q. coccolobifolia* Trel., *Q. viminea* Trel. y *Q. candicans* Née.

Para cada árbol con diámetro normal igual o mayor a 7.5 cm se obtuvo el diámetro normal medido a 1.3 m ( $d$ , cm) con cintas diamétricas Ben Meadows® modelo 122450; la altura total del árbol ( $h$ , m) y del fuste sin ramas ( $h$ , m) se midió con el clinómetro SUUNTO® modelo Pm5/360pc. Con estos datos se estimaron las variables: número de árboles por hectárea ( $N$ , árboles ha<sup>-1</sup>), área basal ( $G$ , m<sup>2</sup> ha<sup>-1</sup>), diámetro medio cuadrático ( $d_g$ , cm), altura y diámetro dominantes, estimados como el promedio de los 100 árboles de mayor dimensión por hectárea ( $H_0$ , m y  $D_0$ , cm, respectivamente) (Assmann, 1970). En el Cuadro 1 se muestran los principales estadísticos descriptivos de la base de datos usada en el ajuste de las FDP.

**Cuadro 1.** Resumen de la base de datos empleada en el ajuste y modelización de las distribuciones diamétricas.

Variable	Media	Intervalo
Diámetro normal ( $d$ , cm)	19.6	7.9–64.9
Altura total ( $h$ , m)	10.2	6.5–15.0
Coefficiente de asimetría del diámetro normal (cm)	1.2	-0.2–4.0

---

Coeficiente de <i>Curtosis</i> del diámetro normal (cm)	4.4	1.5–22.6
Altura dominante ( $H_0$ , m)	17.9	12.7–25.4
Diámetro dominante ( $D_0$ , m)	39.1	28–50.3
Diámetro medio cuadrático ( $d_g$ )	22.3	15.8–28.6
Área basal por hectárea ( $G$ , m <sup>2</sup> )	24.5	13–38.3
Número de árboles por hectárea ( $N$ )	630.6	400–1 303

---

## Modelos

### Ajuste de las FDP

Se probó la bondad de ajuste de tres de las FDP de más amplio uso en el campo forestal (Gorgoso *et al.*, 2012; Ogana, 2020), las cuales se describen enseguida.

#### FDP *Weibull* de dos parámetros

La FDP *Weibull* de dos parámetros tiene la expresión siguiente (Bailey y Dell, 1973):

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c} dx = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c} \quad (1)$$

Donde:

$F(x)$  = Frecuencia relativa acumulada de la variable aleatoria  $x$

$b$  y  $c$  = Parámetros de escala y forma, respectivamente

Los parámetros de la FDP *Weibull* se estimaron por dos métodos: (i) máxima verosimilitud, y (ii) momentos.

### **Máxima Verosimilitud (ML)**

El método comúnmente usado para estimar los parámetros de la FDP *Weibull* con buenas estimaciones es ML, en comparación con otros procedimientos (Sghaier *et al.*, 2016). De acuerdo a Nanos y Montero (2002), los parámetros  $b$  y  $c$  se resuelven con las expresiones siguientes:

$$c = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^c \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^c} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right]^{-1} \quad (2)$$

$$b = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^c \right]^{c-1} \quad (3)$$

Donde:

$n$  = Número de observaciones

$x_i$  = Diámetro normal de cada árbol

El valor del parámetro  $c$  se calculó con la Ecuación 2 mediante un procedimiento iterativo, posteriormente el valor del parámetro  $b$  se obtuvo con la Ecuación 3.

### **Método de Momentos (MM)**

El MM consiste en relacionar los parámetros  $b$  y  $c$  de la FDP *Weibull* con el primer y el segundo momento de la distribución diamétrica (diámetro promedio y varianza). Lei (2008) indica que los parámetros  $b$  y  $c$  se resuelven con las expresiones siguientes:

$$\sigma^2 = \frac{\bar{d}^2}{r^2 \left[1 + \frac{1}{c}\right]} \left( \Gamma \left[1 + \frac{2}{c}\right] - \Gamma^2 \left[1 + \frac{1}{c}\right] \right) \quad (4)$$

$$b = \frac{\bar{d}}{r \left[1 + \frac{1}{c}\right]} \quad (5)$$

Donde:

$\bar{d}$  y  $\sigma^2$  = Diámetro promedio y varianza de la distribución, respectivamente

$\Gamma(i)$  = Función *Gamma* tabulada como  $(i-1)!$



El valor del parámetro  $c$  en la Ecuación 4 se estimó con un procedimiento iterativo, posteriormente el valor del parámetro  $b$  se obtuvo con la Ecuación 5.

### **FDP $S_B$ Johnson**

La FDP  $S_B$  Johnson tiene la expresión siguiente (Johnson, 1949):

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x-\varepsilon)(\varepsilon+\lambda-x)} e^{-\frac{1}{2}\left[\gamma+\delta \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\varepsilon+\lambda-x}\right)\right]^2} \quad (6)$$

$$\varepsilon < x < \varepsilon + \lambda; \delta, \lambda > 0; -\infty < \gamma < \infty; -\infty < \varepsilon < \infty$$

Donde:

$f(x)$  = Frecuencia relativa de la variable aleatoria  $x$

$\varepsilon, \lambda$  = Parámetros de localización y escala, respectivamente

$\gamma, \delta$  = Parámetros de forma que expresan la asimetría y curtosis, respectivamente

$\ln$  = Logaritmo natural de base 10

Los parámetros de la FDP  $S_B$  Johnson se determinaron por el método de momentos (MM) (Soares *et al.*, 2003); se consideró el valor del parámetro de localización ( $\varepsilon$ ) como el diámetro mínimo de la distribución y el valor del parámetro de escala ( $\lambda$ ) como la diferencia entre al valor máximo y mínimo de la distribución (intervalo); en tanto que los parámetros de forma ( $\delta, \gamma$ ) se estimaron con las expresiones siguientes:

$$\delta = \frac{\mu(1-\mu)}{Sd(x)} + \frac{Sd(x)}{4} \left[ \frac{1}{\mu(1-\mu)} - 8 \right] \quad (7)$$

$$y = \delta \ln\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) + \left(\frac{0.5-\mu}{\delta}\right) \quad (8)$$

Donde:

$$\mu = (\bar{d} - \varepsilon) / \lambda$$

$\bar{d}$  = Diámetro promedio de la distribución

$Sd(x)$  = Desviación típica de la distribución

### **FDP Beta**

La expresión general de la FDP *Beta* para una variable aleatoria continua sigue la expresión siguiente:

$$f(x) = c(x - \varepsilon)^\alpha (\lambda - x)^\nu; \quad \varepsilon \leq x \leq \lambda(\varepsilon + \lambda) \quad (9)$$

Donde:

$f(x)$  = Frecuencia relativa de la variable aleatoria  $x$

$\varepsilon, \lambda$  = Parámetros de localización y escala, respectivamente

$c$  = Factor de escala de la función

$\alpha, \gamma$  = Primer y segundo exponente que determinan la forma de la distribución, respectivamente

Los parámetros de la FDP *Beta* se calcularon por el método de momentos (Loetsch *et al.*, 1973). Los parámetros se obtienen del primer y segundo momento de la distribución (diámetro medio aritmético  $\bar{d}$  y la varianza  $s^2$ , respectivamente) mediante las expresiones siguientes:

$$\gamma = \frac{Z}{\frac{s^2(Z+1)^2}{Z+1}} - 1 \quad (10)$$

$$\alpha = Z(\gamma + 1) - 1 \quad (11)$$

Donde:

$$Z = \frac{x_r}{1-x_r} \quad (12)$$

$$x_r = \frac{\bar{d} - \varepsilon}{\lambda - \varepsilon} \quad (13)$$

$$s_r^2 = \frac{s^2}{(\lambda - \varepsilon)^2} \quad (14)$$

El parámetro  $c$  se calcula como:

$$c = \frac{1}{\int_{\varepsilon}^{\lambda} (x - \varepsilon)^{\alpha} (\lambda - x)^{\gamma} dx} = \frac{(-\varepsilon + \lambda)^{1+\gamma} \Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+\gamma)}{\left(\frac{1}{-\varepsilon + \lambda}\right)^{\alpha} \Gamma(2+\alpha+\gamma)} \quad (15)$$

Donde:

$\Gamma(i)$  = Función *Gamma* tabulada como  $(i-1)!$

Los parámetros de las FDP se obtuvieron usando la función *mledist* del paquete *fitdistrplus* (Delignette-Muller y Dutang, 2015) implementado en R (R Core Team, 2020).

## **Evaluación de las FDP**

El análisis de la capacidad de ajuste de las FDP se basó en comparaciones numéricas y gráficas de los errores (residuos). Los estadísticos utilizados para evaluar la bondad de ajuste fueron: (i) Sesgo medio (*SM*), cuyo valor óptimo es cero, lo que implica que las desviaciones entre los valores reales y predichos se compensan para el total de los datos analizados; y (ii) Raíz del Error Medio Cuadrático (*REMC*), el cual es un indicador de la precisión: cuanto menor sea su

valor, menor será la diferencia entre los valores reales y los predichos (Gorgoso-Varela *et al.*, 2020). Las expresiones matemáticas son las siguientes:

$$SM = \frac{\sum_{i=1}^n (F(x_i) - \hat{F}(x_i))}{n} \quad (16)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (F(x_i) - \hat{F}(x_i))^2}{n-p}} \quad (17)$$

Donde:

$F(x_i)$  y  $\hat{F}(x_i)$  = Número de árboles observados (valor real) y estimados respectivamente en la clase diamétrica  $i$

$n$  = Número de observaciones

$p$  = Número de parámetros de la FDP

Los valores del  $SM$  y  $REMC$  se estimaron para cada FDP como el promedio de las frecuencias relativas de cada clase diamétrica (se tabuló en clases de 2 cm) para cada sitio de muestreo y rodal. Para validar si las frecuencias acumuladas empíricas y teóricas son similares, se usó la prueba de *Kolmogorov-Smirnov (KS)* (Sokal y Rohlf, 2012). La diferencia máxima en valor absoluto más notable entre ambas frecuencias estará dada por el valor  $D_n$  de la expresión siguiente:

$$D_n = \text{Máximo}|F(x_i) - F^*(x_i)|; \in 0 \leq i \leq n \quad (18)$$

Donde:

$F(x_i)$  y  $F^*(x_i)$  = Distribución empírica y teórica acumulada, respectivamente

El valor de  $D_n$  se compara con el obtenido de una tabla en función del número de datos ( $n$ ) y el nivel de significancia escogido ( $\alpha=20\%$ ).

## **Modelación de los parámetros de las FDP**

Para estimar los parámetros de la distribución futura se utilizó la metodología de los momentos de Shifley y Lentz (1985), de modo que los parámetros de la FDP están directamente relacionados con los momentos de primer y segundo orden respecto al origen, es decir, el diámetro promedio ( $\bar{d}$ ) y la varianza ( $s^2$ ). A su vez, esta última se relaciona con el diámetro medio cuadrático del rodal ( $d_g$ ). El valor del  $d_g$  del rodal a cualquier edad (años) se puede estimar a partir de los valores de densidad ( $N$ , árboles  $ha^{-1}$ ) y de área basal ( $G$ ,  $m^2 ha^{-1}$ ) [ $d_g = \sqrt{\frac{4G}{\pi \cdot N}}$ ], que se obtienen de los modelos que se construyan para las especies presentes en el rodal. Sin embargo, debido a que el valor del  $\bar{d}$  no se puede obtener directamente a partir de las variables del rodal, se ajustó una relación entre el  $d_g$  y las variables del rodal.

Dado que el  $d_g$  siempre es igual o mayor que el  $\bar{d}$ , se utilizó un modelo matemático para reducir el sesgo que genera utilizar el  $d_g$  originalmente estimado [ $\bar{d} = d_g - \exp(\beta \cdot X)$ ], donde  $X$  es una matriz de las variables de rodal que caracterizan el estado del mismo a cualquier edad y que pueden obtenerse de un modelo de rodal

estático o dinámico;  $\beta$  es el vector de parámetros por estimar. Una vez conocido el valor de  $\bar{d}$  y  $d_g$  del rodal, la varianza ( $s^2$ ) (momento de segundo orden de la distribución respecto a la media) se calcula mediante la relación matemática:  $s^2 = d_g^2 - \bar{d}^2$  (Frazier, 1981).

En el caso de las FDP *S<sub>B</sub> Johnson* y *Beta*, la metodología de recuperación de parámetros por el método de momentos requirió ajustar otra ecuación que relacionó el diámetro máximo de la distribución con las variables del rodal y que se estiman a partir de los modelos de crecimiento [ $d_{max} = (\beta \cdot X)$ ]. Con estas ecuaciones será posible emplear las relaciones para estimar  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  asumiendo que el parámetro de localización  $\varepsilon$  corresponde al diámetro mínimo inventariable, que para este caso es igual a cero (Gorgoso *et al.*, 2012).

## Resultados y Discusión

### Ajuste y evaluación de las FDP

En el Cuadro 2 se presentan los estadísticos usados para evaluar la calidad del ajuste, así como el número y porcentaje de sitios de muestreo que superaron la prueba de *KS* para las FDP evaluadas.

**Cuadro 2.** Bondad de ajuste de las funciones de densidad de probabilidad (FDP) evaluadas en la etapa de ajuste.

<b>FDP</b>	<b>SM</b>	<b>REMC</b>	<b>KS (n)</b>	<b>KS (%)</b>
<i>Weibull</i> (MM)	0.10	0.29	1 595	70.8
<i>Weibull</i> (ML)	0.10	0.30	1 509	67.0
<i>S<sub>B</sub> Johnson</i>	0.11	0.30	1 351	60.0
<i>Beta</i>	0.16	0.96	742	32.9

*SM* = Sesgo medio (cm); *REMC* = Raíz del Error Medio Cuadrático; *KS* (n) y *KS* (%) = Número y porcentaje de parcelas que superaron la prueba de *Kolmogorov-Smirnov* de un total de 2 252, respectivamente; MM = Método de Momentos; ML = Método de Máxima Verosimilitud.

Los estadísticos revelan una diferencia significativa entre la capacidad del ajuste de la FDP *Weibull* respecto a las FDP *Beta* y *S<sub>B</sub> Johnson*. Lo anterior se demostró en los valores más bajos del *SM* y la *REMC* en todas las clases diamétricas, además presentó el porcentaje más alto de sitios de muestreo que superaron la prueba de *KS* para un nivel de significancia de 20 %; lo que da una idea clara de la validez del uso de esta distribución para describir adecuadamente el amplio intervalo de formas que muestran las distribuciones diamétricas para este tipo de masas forestales. Pece et al. (2000) sugieren que el nivel de significancia de 20 % de la prueba de *KS* es el más exigente al reducir las desviaciones mínimas para el no rechazo de la concordancia.

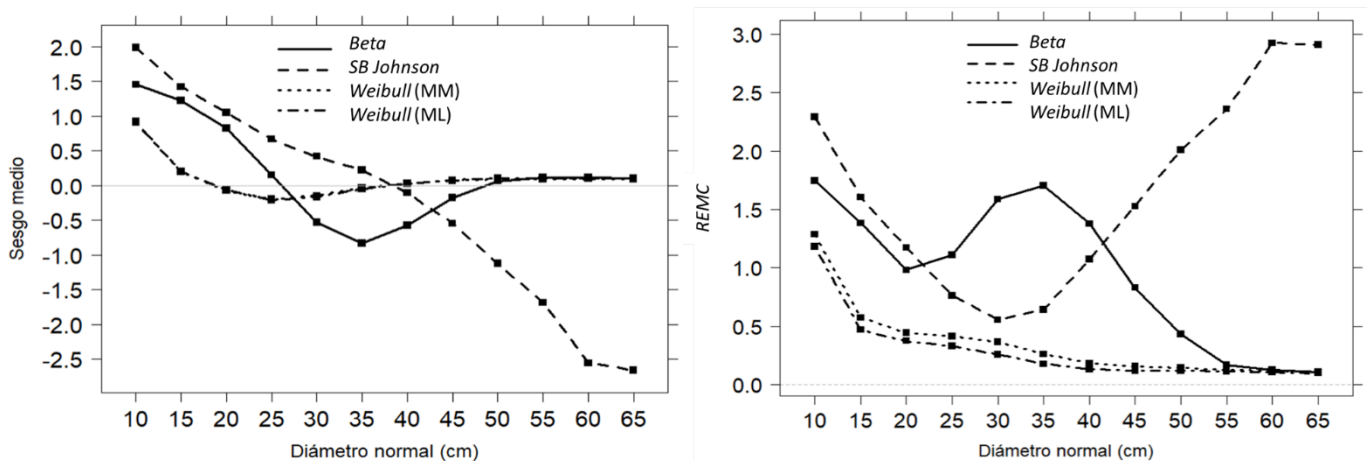
Los resultados reflejan la flexibilidad y parsimonia de la FDP *Weibull* debido a que solo requiere la estimación de dos parámetros, en comparación a cuatro que se tiene que estimar en las FDP *Beta* y *S<sub>B</sub> Johnson*. Diversos autores también citan la flexibilidad de la FDP *Weibull* para describir un amplio intervalo de distribuciones unimodales (*j*-invertida, exponencial y normal), además, resaltan su capacidad para ser expresada en su forma cerrada, como función de distribución acumulada



(simplicidad matemática) (Bailey y Dell, 1973; Reynolds *et al.*, 1998; Maldonado y Návar, 2002; Liu *et al.*, 2004; Palahí *et al.*, 2006; Lei, 2008; Pogoda *et al.*, 2019).

Al analizar las metodologías de ajuste de la FDP *Weibull*, se observó una ganancia marginal en el número de parcelas que superaron la prueba de *KS* mediante el uso del MM (70.8 %), en contraste con el ML (67.0 %). Al respecto, trabajos como el de Corral-Rivas *et al.* (2015) confirman la idoneidad del ajuste de la FDP *Weibull* por el MM, en relación a cuatro metodologías alternativas evaluadas para los bosques mixtos e irregulares del noroeste de Durango. Por su parte, Sun *et al.* (2019) recomiendan estimar los parámetros de esta distribución con el método de momentos y regresión no lineal para masas mixtas e irregulares en China.

Para la detección de algún tipo de patrón sistemático, se analizó el comportamiento de las FDP con base en la evolución del SM y la *REMC* en la predicción del número de árboles por clase diamétrica (Figura 1).



**Figura 1.** Evolución del sesgo medio y Raíz del Error Medio Cuadrático (*REMC*) en la predicción de árboles por clase diamétrica de las FDP evaluadas en la etapa de ajuste.

A la vista de la Figura 1, se observa que la FDP *S<sub>B</sub> Johnson* presentó los valores de *SM* y *REMC* más altos en las clases diamétricas menores, indicativo de que

subestima las frecuencias en las clases diamétricas más pequeñas y sobreestima en las clases diamétricas a partir de 45 cm. La FDP *Beta* también subestima las frecuencias más pequeñas y sobreestima las frecuencias intermedias (30–40 cm), mejora su precisión a partir de la clase diamétrica de 45 cm. Finalmente, la estimación de las frecuencias con mejor precisión en todo el intervalo de las clases diamétricas observadas con una tendencia muy similar, se logró con el ajuste de la FDP *Weibull* mediante el MM y ML.

Al comparar las metodologías de ajuste MM y ML de la FDP *Weibull*, se observó que no existen diferencias significativas entre los valores de los estadísticos de bondad de ajuste y su comportamiento en la predicción de las frecuencias en todo el intervalo de las clases diamétricas. Gorgoso *et al.* (2012) y Quiñonez *et al.* (2015) en sus estudios en el noroeste de Durango, México y en el noroeste de España, respectivamente, obtienen los mejores resultados con la metodología de ajuste de MM y ML. Por tanto, para seleccionar la metodología de ajuste de la FDP *Weibull*, se analizó el número de parcelas excluidas con la prueba de *KS*, se determinó que el MM fue ligeramente mayor (70.8 %), por lo que el resto de los análisis se limitan a dicha función con los parámetros estimados mediante el MM para la modelación de las distribuciones diamétricas del rodal a cualquier intervalo de tiempo.

## **Modelación de la distribución diamétrica**

La estimación de los parámetros (escala y forma) de la FDP *Weibull* mediante la metodología de recuperación de parámetros con el MM, presentó simplicidad y resultados deseables de acuerdo a los valores de los estadísticos de bondad de ajuste evaluados. Del total de los sitios de muestreo, 62 % superaron la prueba de

KS para un nivel de significancia de 20 % (1 394 sitios de muestreo). Este resultado da validez e idoneidad a la FDP *Weibull* para describir adecuadamente el amplio intervalo de formas que se observan en las distribuciones diametrales de los bosques sometidos a manejo forestal en cualquier etapa de su desarrollo. Resultados similares obtuvieron Siipilehto y Mehtätalo (2013), quienes comparan las metodologías de recuperación y predicción de los parámetros de la FDP *Weibull* de dos parámetros en rodales de *Pinus sylvestris* L. en Finlandia; demostraron que la recuperación de parámetros proporciona mejor compatibilidad con las características del rodal, especialmente al estimar el volumen por clase diamétrica con mayor precisión. Además, Quiñonez *et al.* (2015) demuestran que para las masas incoetáneas con una mezcla de especies, la recuperación de los parámetros por el MM de la FDP *Weibull* resulta ser más precisa.

Puesto que el diámetro promedio de un rodal siempre es menor o igual que su diámetro promedio cuadrático, la relación al ajustar debe cumplir esta condición de compatibilidad. Para ello, se determinó que el modelo matemático que cumple tal restricción tiene la estructura siguiente:

$$\bar{d} = d_g - \exp(\beta_0 + \beta_1 * N + \beta_2 * G + \beta_3 * RS) \quad (19)$$

Donde:

$d_g$  = Diámetro promedio cuadrático (cm)

$N$  = Número de árboles por hectárea

$G$  = Área basal ( $m^2 ha^{-1}$ )

$RS$  = Índice de espaciamiento relativo (%)

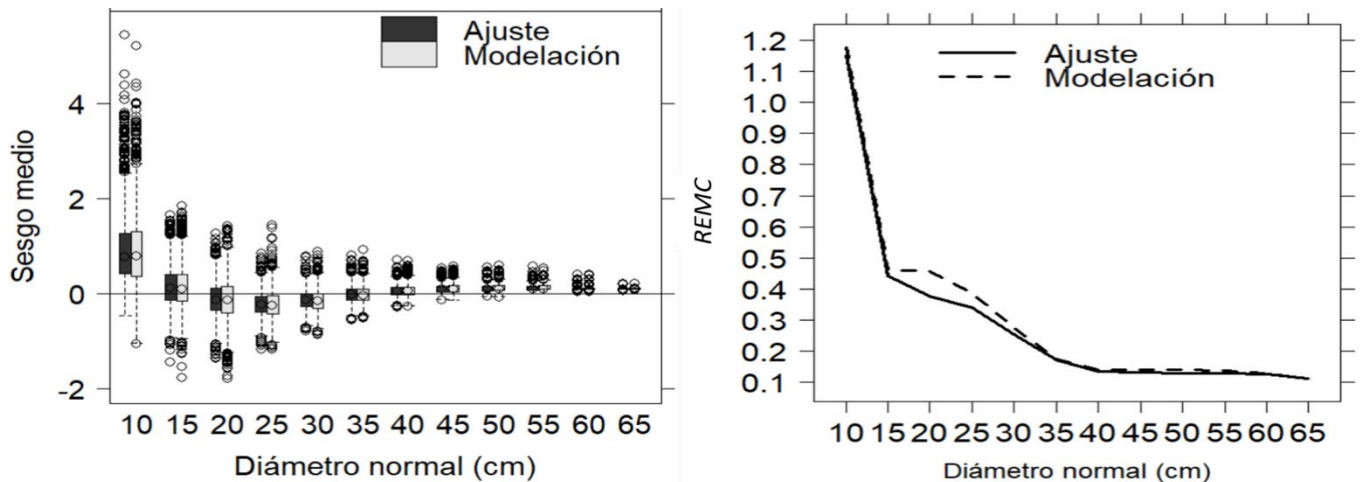
$\beta_i$  = Parámetros a ser estimados

El ajuste de la Ecuación 19 fue bueno, ya que los valores del coeficiente de determinación ( $R^2$ ) y de la  $REMC$  fueron de 0.933 y 0.722 cm, respectivamente. En el Cuadro 3 se presentan los valores estimados de los parámetros con la Ecuación 19.

**Cuadro 3.** Parámetros estimados con el modelo de predicción del diámetro promedio del rodal.

Parámetro	Estimadores	Error estándar	$t$ para $H_0$ (Parámetro=0)	Prob>F
$\beta_0$	0.69223	0.06014	11.51	0.0001
$\beta_1$	-0.00085	0.00008	-11.08	0.0001
$\beta_2$	0.01293	0.00217	5.96	0.0001
$\beta_3$	0.02963	0.00379	7.82	0.0001

El proceso de validación derivado de la representación de la evolución del sesgo medio y la Raíz del Error Medio Cuadrático por clases diamétricas obtenidos en la etapa de ajuste y modelación de la FDP *Weibull*, se muestra en la Figura 2.



**Figura 2.** Evolución del sesgo medio y Raíz del Error Medio Cuadrático ( $REMC$ ) por clase diamétrica con la FDP *Weibull* en la fase de ajuste y modelación.

La Figura 2 compara el error en términos del número de árboles predichos por clase de diámetro, se observa que las mayores desviaciones sobreestiman y se localizan en las clases diamétricas inferiores a 15 cm. La razón puede ser el resultado de la influencia que tienen las intervenciones silvícolas y el efecto de la competencia sobre las masas jóvenes con diferentes mezclas de especies. Este mismo comportamiento fue observado por Corral-Rivas *et al.* (2015) para masas de coníferas y latifoliadas en el noreste de Durango, México. Entonces, al tratarse de masas con el mayor número de árboles por unidad de superficie, cualquier cambio en su estructura incrementa su variación. Al respecto, Sandoval *et al.* (2012) concluyen que la precisión en la predicción de estructuras diamétricas con la FDP *Weibull* aumenta con la edad de la plantación de tres especies dendroenergéticas en Chile.

Los resultados del presente estudio son muy similares a los documentados por Sun *et al.* (2019) para masas mixtas e irregulares en China, donde las cortas intermedias de *Pinus tabuliformis* Carrière resultaron en masas con una distribución bimodal.

## Conclusiones

La metodología seleccionada para estimar los parámetros de la FDP *Weibull* (bi-paramétrica) permite estimar con adecuada precisión el número de árboles por categoría diamétrica a nivel de unidad de superficie. La recuperación de parámetros de la FDP *Weibull* por el método de momentos es eficiente y sugiere que las estructuras diamétricas tienen un comportamiento unimodal y puede usarse para estimar los productos que se obtendrán del bosque en un determinado momento

(edad), por lo que representa una herramienta silvícola útil para planificar el manejo forestal sustentable de las masas mixtas e irregulares del suroeste de Durango, México. La parsimonia (simplicidad) de la FDP representa una característica deseable para implementarse en un modelo empírico con suficiente potencial para que sea de uso práctico en el área de estudio.

Se advierte que en la etapa de modelación un porcentaje de las masas estudiadas (38 %) no superaron la prueba de *KS*, lo que representa una oportunidad para trabajos futuros sobre el estudio de funciones de distribución bimodal para cubrir este tipo de estructuras.

### **Agradecimientos**

Se agradece a CONACYT por el apoyo financiero otorgado al primer autor para estudiar en el programa de Maestría en El Instituto Tecnológico de El Salto / Tecnológico Nacional de México.

### **Conflicto de intereses**

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

### **Contribución por autor**

Alondra Anahi Vega y Sacramento Corral Rivas: diseño de manuscrito, análisis de datos y redacción del documento; José Javier Corral Rivas y Ulises Diéguez Aranda: redacción parcial y revisión del escrito.

## Referencias

- Assmann, E. 1970. The principles of forest yield study: studies in the organic production, structure, increment and yield of forest stands. Pergamon Press. New York, NY, USA. 506 p.
- Bailey T., R. L. and R. Dell. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science* 19(2):97-104. Doi: 10.1093/forestscience/19.2.97.
- Cao, Q. V. 2004. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. *Forest Science* 50(5):682-685. Doi: 10.1093/forestscience/50.5.682.
- Corral-Rivas, S., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas and C. A. López-Sánchez. 2015. Characterization of diameter structures of natural forests of northwest of Durango, Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 21(2):221-236. Doi: 10.5154/r.rchscfa.2014.10.046.
- Delignette-Muller, M. L. and C. Dutang. 2015. fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software* 64(4):1-34. Doi: 10.18637/jss.v064.i04.
- Frazier, J. R. 1981. Compatible whole-stand and diameter distribution models for loblolly pine plantations. PhD thesis. School of Forestry and Wildlife, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blackburg, VA, USA. 125 p.
- García, M. E. 2004. Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen. Instituto de Geografía, Universidad Nacional Autónoma de México. Coyoacán, México, D. F., México. 91 p.
- González-Elizondo, M. S., M. González-Elizondo, J. A. Tena-Flores, L. Ruacho-González e I. L. López-Enríquez. 2012. Vegetación de la sierra madre occidental,

México: Una síntesis. Acta Botánica Mexicana 100:351-403. Doi: 10.21829/abm100.2012.40.

Gorgoso, J. J., A. Rojo, A. Camara-Obregon and U. Dieguez-Aranda. 2012. A comparison of estimation methods for fitting Weibull, Johnson's  $S_B$  and beta functions to *Pinus pinaster*, *Pinus radiata* and *Pinus sylvestris* stands in northwest Spain. Forest Systems 21(3):446-459. Doi: 10.5424/fs/2012213-02736.

Gorgoso-Varela, J. J., F. N. Ogana and P. O. Ige. 2020. A comparison between derivative and numerical optimization methods used for diameter distribution estimation. Scandinavian Journal of Forest Research 35(3-4):1-9. Doi: 10.1080/02827581.2020.1760343.

Hyink, D. M. and J. W. Moser. 1983. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. Forest Science 29(1):85-95. Doi: 10.1093/forestscience/29.1.85.

Jiang, L. and J. R. Brooks. 2009. Predicting diameter distributions for young longleaf pine plantations in Southwest Georgia. Southern Journal of Applied Forestry 33(1):25-28. Doi: 10.1093/sjaf/33.1.25.

Johnson, N. L. 1949. Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika 36(1-2):149-176. Doi: 10.2307/2332539.

Lei, Y. 2008. Evaluation of three methods for estimating the Weibull distribution parameters of Chinese pine (*Pinus tabulaeformis*). Journal of Forest Science 54(12):566-571. Doi: 10.17221/68/2008-JFS.

Liu, C., S. Y. Zhang, Y. Lei, P. F. Newton and L. Zhang. 2004. Evaluation of three methods for predicting diameter distributions of black spruce (*Picea mariana*) plantations in central Canada. Canadian Journal of Forest Research 34(12):2424-2432. Doi: 10.1139/x04-117.

Loetsch, F., K. E. Haller and F. Zöhrer. 1973. Forest inventory 2. Inventory data collected by terrestrial measurements and observations, data processing in forest



inventory. The sample plot, plotless sampling and regeneration survey. List sampling with unequal probabilities and planning, performan. Verlagsgesellschaft BLV. Munich, BY, Germany. 469 p.

Maldonado A., D., y J. Návar C. 2002. Ajuste y predicción de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas de plantaciones de pino de Durango, México. *Madera y Bosques* 8(1):61-72. Doi: 10.21829/myb.2002.811306.

Nanos, N. and G. Montero. 2002. Spatial prediction of diameter distributions models. *Forest Ecology and Management* 161(1-3):147-158. Doi: 10.1016/S0378-1127(01)00498-4.

Ogana, F. N. 2020. A percentile-based estimator for the log-logistic function: Application to forestry. *Forestry Studies|Metsanduslikud Uurimused* 72(1):107-120. Doi: 10.2478/fsmu-2020-0009.

Palahí, M., T. Pukkala and A. Trasobares. 2006. Modelling the diameter distribution of *Pinus sylvestris*, *Pinus nigra* and *Pinus halepensis* forest stands in Catalonia using the truncated Weibull function. *Forestry: An International Journal of Forest Research* 79(5):553-562. Doi: 10.1093/forestry/cpl037.

Pece, M. G., C. G. de Benítez y M. J. de Galíndez. 2000. Uso de la función Weibull para modelar distribuciones diamétricas en una plantación de *Melia azedarach*. *Revista Forestal Venezolana* 44(2):49-52. [http://www.saber.ula.ve/bitstream/handle/123456789/24167/articulo44\\_2\\_5.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://www.saber.ula.ve/bitstream/handle/123456789/24167/articulo44_2_5.pdf?sequence=1&isAllowed=y). (25 de junio de 2022).

Pogoda, P., W. Ochal and S. Orzel. 2019. Modeling diameter distribution of Black Alder (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) Stands in Poland. *Forests* 10(5):1-16. Doi: 10.3390/f10050412.

Quiñonez B., G., H. M. De los Santos P., F. Cruz C., A. Velázquez M., G. Ángeles P. y G. Ramírez V. 2015. Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas

mezcladas de *Pinus* en Durango, México. *Madera y Bosques* 21(2):59-71. Doi: 10.21829/myb.2015.212445.

R Core Team. 2020. R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.r-project.org/>. (12 de mayo de 2020).

Reynolds, M. R., T. E. Burk and W-C. Huang. 1998. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. *Forest Science* 34(2):373-399. Doi: 10.1093/forestscience/34.2.373.

Sandoval, S., J. Cancino, R. Rubilar, E. Esquivel, E. Acuña, F. Muñoz and M. Espinosa. 2012. Probability distributions in high-density dendroenergy plantations. *Forest Science* 58(6):663-672. Doi: 10.5849/forsci.11-028.

Soares S., J. R., F. C. Vitti T., R. L. Grisi de M., F. W. Acerbi Jr. and A. L. de Assis. 2003.  $S_B$  distribution's accuracy to represent the diameter distribution of *Pinus taeda*, through five fitting methods. *Forest Ecology and Management* 175(1-3):489-496. Doi: 10.1016/S0378-1127(02)00183-4.

Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat). 2021. Anuario Estadístico de la Producción Forestal 2018. Semarnat-Dirección General de Gestión Forestal y de Suelos. Miguel Hidalgo, CdMx, México. 298 p.

Sghaier, T., I. Cañellas, R. Calama and M. Sánchez-González. 2016. Modelling diameter distribution of *Tetraclinis articulata* in Tunisia using normal and Weibull distributions with parameters depending on stand variables. *iForest Biogeosciences and Forestry* 9(5):702-709. Doi: 10.3832/ifor1688-008.

Shifley, S. and E. Lentz. 1985. Quick estimation of the three-parameter Weibull to describe tree size distributions. *Forest Ecology and Management* 13(3-4):195-203. Doi: 10.1016/0378-1127(85)90034-9.

Siipilehto, J. and L. Mehtätalo. 2013. Parameter recovery vs. parameter prediction for the Weibull distribution validated for Scots pine stands in Finland. *Silva Fennica* 47(4):1-22. Doi: 10.14214/sf.1057.

Sokal, R. R. and F. J. Rohlf. 2012. *Biometry. The principles and practice of statistics in biological research.* W.H. Freeman and Company. New York, NY, USA. 915 p.

Sun, S., Q. V. Cao and T. Cao. 2019. Characterizing diameter distributions for uneven-aged pine-oak mixed forests in the Qinling Mountains of China. *Forests* 10(7):596. Doi: 10.3390/f10070596.

Wang, M. and K. Rennolls. 2005. Tree diameter distribution modeling: Introducing the logit – logistic distribution. *Canadian Journal of Forest Research* 35(6):1305–1313. Doi: 10.1139/x05-057.



Todos los textos publicados por la **Revista Mexicana de Ciencias Forestales** –sin excepción– se distribuyen amparados bajo la licencia *Creative Commons 4.0 [Atribución-No Comercial \(CC BY-NC 4.0 Internacional\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)*, que permite a terceros utilizar lo publicado siempre que mencionen la autoría del trabajo y a la primera publicación en esta revista.