COMPARACIÓN DE CUATRO MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS AL CRECIMIENTO FORESTAL.

Aguilar Ramirez Mario *

RESUMEN.

El presente trabajo se realizó con la finalidad de determinar el comportamiento de los modelos matemáticos Weibull, Schumacher, Gompertz y logístico, aplicados al crecimiento forestal edad-altura mediante funciones continuas de forma sigmoidal.

El estudio se llevó a cabo en el área de Atenquique, Jalisco, en *Pinus douglasiana* con árboles representativos de las tres calidades de estación.

Al tener la información edad-altura de los análisis troncales, se procedió a realizar un programa específico para cada uno de los modelos en una calculadora Texas Instruments 66.

Mediante el análisis de regresión se obtuvieron los parámetros de las ecuaciones de los modelos, sus coeficientes de regresión (r), coeficientes de determinación (R^2), análisis de varianza, F calculada y residuales. Los modelos utilizados presentaron buenos ajustes y valores altos de r y R^2 a excepción del modelo logístico, que no se recomienda utilizar en este tipo de relaciones.

Con pequeñas modificaciones en usos específicos, Schumacher es el mejor modelo para calidad de estación; Weibull y Gompertz sobresalen para crecimiento y los tres modelos para tarifas.

Palabras clave: Estadística forestal, crecimiento forestal, pinos, *Pinus douglasiana*, Jalisco.

ABSTRACT.

This work was conducted to determine the behaivor of the Weibull's, Schumacher's,

* Ingeniero Agrónomo. Especialista en Bosques. Investigador del Campo Experimental Uruapan. CIR-Pacífico Centro. INIFAP-SARH.

Gompertz's and logistic mathematical models applied to forest growth, age-height by continuous sigmoidal functions.

The study was conducted in Atenquique, Jalisco on *Pinus douglasiana* with trees representing all three station's qualities.

With age-height information from trunk analyses, was run a specific program for each model with a Texas Instruments 66 calculator.

Model equation parameters, regression coefficients (r), determination coefficients (R^2), variance analysis, and calculated and residual F were derived by using regression analysis. The models used showed good adjustments and high values for r and R^2 except for the logistic model, that is not recommend on this kind of relations.

With slight amendments in specific uses, Schumacher's model is the best for station quality rating, while Weibull's and Gompertz's models are outstanding to determine growth. All three models were good for reference tables.

Key words: Forest stadistics, forest growth, pines, *Pinus douglasiana,* Jalisco.

INTRODUCCIÓN.

El gran auge computacional y el desarrollo de las matemáticas aplicadas en ecología ha propiciado la elaboración de un gran número de modelos que tratan de explicar los fenómenos de crecimiento y rendimiento forestal.

En México aún es incipiente el uso de los mismos; sin embargo, no puede abstraerse del concepto del modelaje, de gran desarrollo en otros paises.

Con base en lo anterior, las investigaciones deben estar dirigidas al desarrollo y/o adaptación de los modelos más viables para su uso y aplicación en México, de ahí que se requiera conocer las bondades de algunos modelos que no se han aplicado al crecimiento forestal del país.

Por otro lado, el desarrollo de árboles individuales y masas forestales, implica una serie de procesos complejos y cambios observados, que varían mucho con el genotipo, la etapa de desarrollo y los factores ambientales, pero existen numerosos patrones que siguen prácticamente todos los árboles en sus desarrollo y es común encontrar patrones graduales de incremento, que determinan o al menos confieren una forma sigmoide al proceso.

Por ello, la finalidad de este estudio fue el análisis de tales patrones y su caracterización en forma de modelos.

El trabajo se realizó en el área de Atenquique, Jalisco, en *Pinus douglasiana*, con árboles representativos de las tres calidades de estación.

OBJETIVO.

Los objetivos del estudio fueron:

1. Describir cuantitativamente la relación de crecimiento forestal edad-altura mediante funciones continuas de forma sigmoidal.

2. Determinar la bondad de cuatro modelos matemáticos aplicados al crecimiento forestal.

ANTECEDENTES.

1. En el extranjero.

<u>El modelo de Weibull.</u>

En 1974, Clutter y Allison[1] determinaron la distribución inicial de la masa, empleando la función de Weibull calibrada con los datos observados en el campo.

Ek y Monserud[2], mencionaron en 1974, que la utilidad de la función de densidad Beta viene de su habilidad para asumir una amplia variedad de formas; esta flexibilidad es también una propiedad de la función de Weibull.

Sin embargo, la función de Weibull es matemáticamente más tratable que la Beta; de ahí su popularidad para la caracterización del diámetro de las masas.

[1] Clutter, J. L. *and* Allison, B. J. 1974. "A growth and yield model *Pinus radiata* in New Zeland". pp. 137-160.
[2] Ek, A. R. *and* Monserud, R. A. 1974. <u>Forest: A computer model for simulating the growth and reproduction of mixed species forest stands.</u>

En 1983, Day[3] presentó el modelo Weibull modificado como una nueva función no lineal, muy útil en estudios de crecimiento y rendimiento de árboles y masas forestales, usándose para el ajuste de curvas de crecimiento biológico.

Los grupos o juegos de variables pueden ser ajustados de acuerdo con la siguiente modificación de la función de Weibull:

$$\mathbf{Y=A(1-e^{-B(X-Xo)^{c}}+yo.}$$

o bien:

$$\mathbf{Y=T(1-e^{-U(X-Xo)^{V}}+yo} \text{ ———————— } \mathbf{(1)}$$

donde:

T, U y V sustituyen a A, B y C en la fórmula matemática.
T = límite asintótico de los datos.
X y Y = coordenadas para ajustar el origen de los datos.
U = eb o b = LnV, a -punto de intercepción común.
V = B, B. - pendiente determinada por la línea de regresión.

Para 1984, Burk y Burkhart[4] desarrollaron un procedimiento para el cálculo de los parámetros de la función Weibull. Esta técnica fue utilizada por Lenhart[5] en 1986 para predecir la estructura del rodal; número de árboles por acre por clase diamétrica; el total de árboles; subsecuentemente la cantidad de madera por acre por clase diamétrica, para plantaciones de *Pinus slash* y *P. loblolly* en el este de Texas.

Guldin en 1986, con una estructura teórica del rodal basada en el área de copa, llevó a cabo una comparación con la exponencial negativa y el modelo de Weibull en tres rodales irregulares de *P. taeda* y *L. echinata* Mill en Arkansas.

Cao[6], derivó en 1986 los parámetros de una distribución de diámetros de Weibull para los modelos de Coile y Schumacher para rodales naturales irregulares de *P. loblolly*.

---

[3] Day, Z. R. 1983. The modified Weibull function.

[4] Burk, T. Z. *and* Burkhart, H. E. 1984. Diameter distributions and yields of natural stand of *loblolly Pine.*

[5] Lenhart, Z. D. 1986. "Estimating the amount of wood per acre in *loblolly* and *slash Pine* plantations in east Texas". pp. 485-488.

[6] Cao, V. Q. 1986. "Recovering diameter distributions from Schumacher and Coile's model for natural even-eged *loblolly Pine* stand". pp. 514-517.

El modelo de Schumacher.

El modelo de Schumacher ha sido ampliamente utilizado desde que fue presentado por su autor en 1939, como una nueva curva de crecimiento y su aplicación en estudios del rendimiento de madera.

Asi, Schumacher y Coile[7], presentaron el crecimiento y rendimiento de rodales naturales de pinos del suroeste; Alder[8], describió diversos métodos para el estudio del crecimiento y la predicción del rendimiento, al mostrar el modelo de Schumacher con un parámetro no lineal K y también una forma múltiple del modelo.

Nix y colaboradores, han utilizado esta función para calcular los volúmenes de pulpa de madera en estudios de crecimiento y rendimiento en plantaciones de *Pinus loblolly*.

Farrar y Murphy[9], utilizaron una modificación de la función de rendimientos de Schumacher para predecir el volumen de rodales de segundo crecimiento de *P. loblolly*; Cao, *op.cit.*, comparó dos procedimientos para derivar las distribuciones diamétricas, al utilizar el modelo de Weibull y los modelos de Coile y Schumacher.

El modelo de Schumacher es el siguiente:

$$\mathbf{LnH0=LnH\ max + b/ak} \quad \text{———————} \quad \mathbf{(2)}$$

donde:

LnHo = log. natural de la altura dominante.

LnHmax = es el término a en la educación; su valor queda entre 2 y 7.

b = coeficiente de regresión que siempre será negativo.
a = edad de la altura dominante.
k = parámetro a ser ajustado y cuyo valor varia de 0.2 a 2.

El modelo de Gompertz.

El modelo supone que el sustrato no es limitante, por lo tanto, la máquina de crecimiento siempre está saturada de sustrato; la cantidad de maquinaria de crecimiento es proporcional

---

[7] Schumacher, F. X. *and* Coile, T. X. 1960. Growth and yield of natural stands of southern pines.
[8] Alder, D. 1980. Forest volume estimation and yield prediction.
[9] Farrar, M. R. *and* Murphy, A. P. 1986. "In search of an improved sawtimber stand volume function". pp. 508-513.

al peso seco w, con constante de proporcionalidad N, y la efectividad de la maquinaria de crecimiento decae con el tiempo, según una cinética de primer orden (decaimiento exponencial).

Este decaimiento es atribuible a degradación (posiblemente enzimática), envejecimiento o desarrollo y diferenciación.

Formalizando estas hipótesis se tiene:

Ecuación diferencial $$\frac{dx}{dy} = Ky \ Ln \frac{ys}{y}$$

Solución analítica $$Y = Ys \, e^{-e^{a-kX}}$$

Transformación lineal $$Ln \, [1n \frac{(ys)}{y} = a\text{-}kx \text{ ——————— } (3)$$

donde:

Y y X.- variables dependiente e independiente.
ys.- valor máximo de la variable dependiente.
a y k.- constante a determinar
e = Ln.

Maynard[10], realizó una serie de consideraciones sobre modelos deterministas aplicados en ecología, en los que incluye el modelo de crecimiento de Gompertz, *vid., supra*; y los coautores France y Thornley[11], quienes ofrecieron una serie de derivaciones y conceptos de varios modelos matemáticos aplicados en la agricultura, incluyendo el modelo de Gompertz.

El modelo logístico.

Krebs[12] mencionó que la forma más sencilla de dar origen a una curva sigmoide es la de

[10] Maynard, S. J. 1974. "Models in ecology". pp. 12-15.
[11] France, Z. and Thornley, J. H. M. 1984. "Mathematical models in agriculture". pp. 75-94.
[12] Krebs, Z. Ch. 1985. Estudio de la distribución y la abundancia.

introducir en la ecuación geométrica un término que provoque disminución del índice de incremento conforme aumenta la población, pero además se pretende disminuir el índice de incremento de manera uniforme.

Estos objetivos se logran si cada individuo que se agrega a la población origina que disminuya el índice de incremento en una cifra equivalente.

France y Thornley *op.cit.*, mencionan la hipótesis del crecimiento logístico de la siguiente manera: si la cantidad de maquinaria de crecimiento es proporcional al peso seco w y esta maquinaria trabaja a una velocidad proporcional a la cantidad de sustrato S, entonces el crecimiento es irreversible.

Lo anterior da origen a la ecuación siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{(k-N)}{k}$$

donde:

- N = tamaño de la población.
- t = tiempo
- r = índice de crecimiento de la población por individuo
- k = asintota superior o valor máximo de N.

El significado de esta ecuación es:

Índice de incremento de la población por unidad de tiempo	=	índice de crecimiento de la población por individuo	X	tamaño de la población	X	oportunidad no utilizada de crecimiento de la población

Esta es la forma diferencial de la ecuación para la curva logística que planteó originalmente Verhulst en 1838 y los coautores Pearl y Reed en 1920, *cit.pos.* Krebs *op. cit.*

Ecuación diferencial $$\frac{dy}{dx} = Ky \frac{ys-y}{ys}$$

$$Y = \frac{ys}{1+e^{a-kx}}$$

Transformación lineal $$\mathbf{Ln}\ \frac{(Ys\text{-}Y)}{y} = a\text{-}Kx$$

donde:

Y y X - variables dependiente e independiente
ys - valor máximo de la variable dependiente
a y K - constantes a determinar.
e = Ln.

2. En México.

El modelo de Weibull.

En México las aplicaciones del modelo de Weibull son en extremo escasas.

De hecho sólo se tiene el antecedente de dos casos; Aguilar[13], quien aplicó el modelo de Weibull modificado por Day *op.cit.*, como una función no lineal para estudios de crecimiento, a una serie de relaciones alométricas con excelentes resultados y Camarena (*com. pers.*), quien realizó la determinación de calidades de estación bajo este modelo con buenos resultados.

Otras aplicaciones del modelo de Weibull sin modificar, se han realizado en el Sistema de Conservación y Desarrollo Silvícola (SICODESI).

El modelo de Schumacher.

El modelo de Schumacher ha tenido cierta aceptación en México, se ha aplicado en estudios de crecimiento y calidad de estación, así como en los de tarifas de volúmenes; Aguilar[14],[15],[16], *op.cit.* y Benavides[17].

---

[13] Aguilar, R, M. 1988. "Algunas relaciones alométricas y su comportamiento con el modelo de Weibull". pp. 13-25.
[14] Aguilar, R, M. 1982. Estudio del crecimiento de *Pinus douglasiana* y *Pinus lawsonii* en la región centro de Michoacán.
[15] Aguilar, R, M. 1983. La ecuación de Schumacher y su aplicación en estudios del crecimiento y clave de sitio.
[16] Aguilar, R, M. 1984. "Armonización de curvas de crecimiento y calidad de estación". pp. 169-181.
[17] Benavides, J. D. 1987. Estimación de la calidad de sitio mediante índices de sitio del *Pinus michoacana cornuta* Martínez y *Pinus oocarpa* Schiede, para el A D F Tapalpa estado de Jalisco.

El modelo de Gompertz.

Sólo se cuenta con una referencia y es la realizada por Franco[18], en un estudio de simulación demográfica y productividad de poblaciones uniespecíficas de árboles, donde realizó ajustes de la función de Gompertz a una serie de relaciones alométricas de crecimiento e incremento.

El modelo logístico.

En México el uso del modelo logístico en estudios de crecimiento ha sido nulo, a excepción del trabajo realizado por Franco *op.cit.*, quien lo aplicó en el crecimiento de árboles.

También se reporta un intento de aplicación como método indirecto para determinar la edad en árboles tropicales realizados por Del Amo y De Pascual[19].

MATERIALES Y MÉTODOS.

Este trabajo se realizó con el fin de obtener y corroborar mayor información para complementar y reforzar al estudio de agrología forestal, (Aguilar, *op.cit.*), base del estudio de Manejo Integral Forestal de Atenquique, Jalisco.

1. Métodos.

Obtención de la información.

La información fue recabada en Atenquique de los análisis troncales realizados durante el inventario forestal para el estudio de Manejo Integral.

Arreglo de la información.

Los datos de la relación alométrica edad-altura obtenidos de los análisis troncales se arreglaron, por calidad de estación, previa determinación hecha en el trabajo complementario de "Comparación de índices de sitio" obra inédita de Aguilar.

---

[18] Franco, B. M. 1970. Simulación demográfica y productiva de poblaciones uniespecíficas de árboles.

[19] Amo, R. S. del *y* Pascual, Z. M. de. 1980. Aplicación de ecuaciones y modelos matemáticos en la evaluación de tasas de crecimiento y determinación de la edad en árboles tropicales.

Se eligió un árbol de la especie *Pinus douglasiana*; que fuera representativo de cada una de las tres calidades de estación determinadas.

Programas para el uso de los modelos.

Al tener la información edad-altura de los análisis troncales y definidos los modelos a utilizar para el ajuste de estas relaciones, se procedió a realizar un programa específico para cada uno de los modelos en una calculadora Texas Instruments 66.

Los programas se desarrollaron de acuerdo con las fórmulas de los modelos:

1. Weibull
2. Schumacher
3. Gompertz
4. Logístico

Análisis de regresión.

Mediante el análisis de regresión se obtuvieron los parámetros de las ecuaciones de los modelos; sus coeficientes de regresión (r); coeficientes de determinación (R^2); análisis de varianzas; F. calculada y residuales.

Comportamiento de los modelos.

Con el ajuste de los modelos, se estuvo en condiciones de analizar el comportamiento de los mismos para describir el comportamiento de la relación edad-altura de *Pinus douglasiana* y establecer comparaciones para definir el o los mejores modelos para su uso en este tipo de estudios.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

Los árboles que se determinaron como muestra fueron:

Para la calidad I. 70 árboles, 62 años y una altura de 35.7 m.

Para la calidad II. 61 árboles, 100 años y una altura de 30.7 m.

Para la calidad III. 55 árboles, 90 años de edad y una altura total de 26 m.

Los parámetros de los ajustes de los modelos se muestran en el cuadro N° 1.

Calidad estación	Ecuación	r	R^2
I	$Y=35.81(1-e^{-5.13423(x-2)^{1.58298}})+0.2$	0.97	0.94
II	$Y=30.8(1-e^{-4.79117(x-2)^{1.396.36}})+0.2$	0.96	0.92
III	$Y=26.22(1-e^{-5.69647(x-2.5)^{1.616.90}})+0.28$	0.99	0.98

Cuadro N° 1. Parámetros del modelo de Weibull.

Puede observarse que con este modelo se tuvo un excelente ajuste de acuerdo a los valores de r y R^2; pero debido a fines prácticos se optó por considerar como el mejor modelo, a aquél que gráficamente describa en forma superior la relación edad-altura.

En la figura N° 1, *vid., infra,* se tienen los datos originales de esta relación y los valores pronosticados de acuerdo con los coeficientes de los modelos.

Como puede observarse, el ajuste con el modelo de Weibull es satisfactorio, aunque se aprecian divergencias en las curvas de sobre y subestimación de los valores; en realidad no son tan graves.

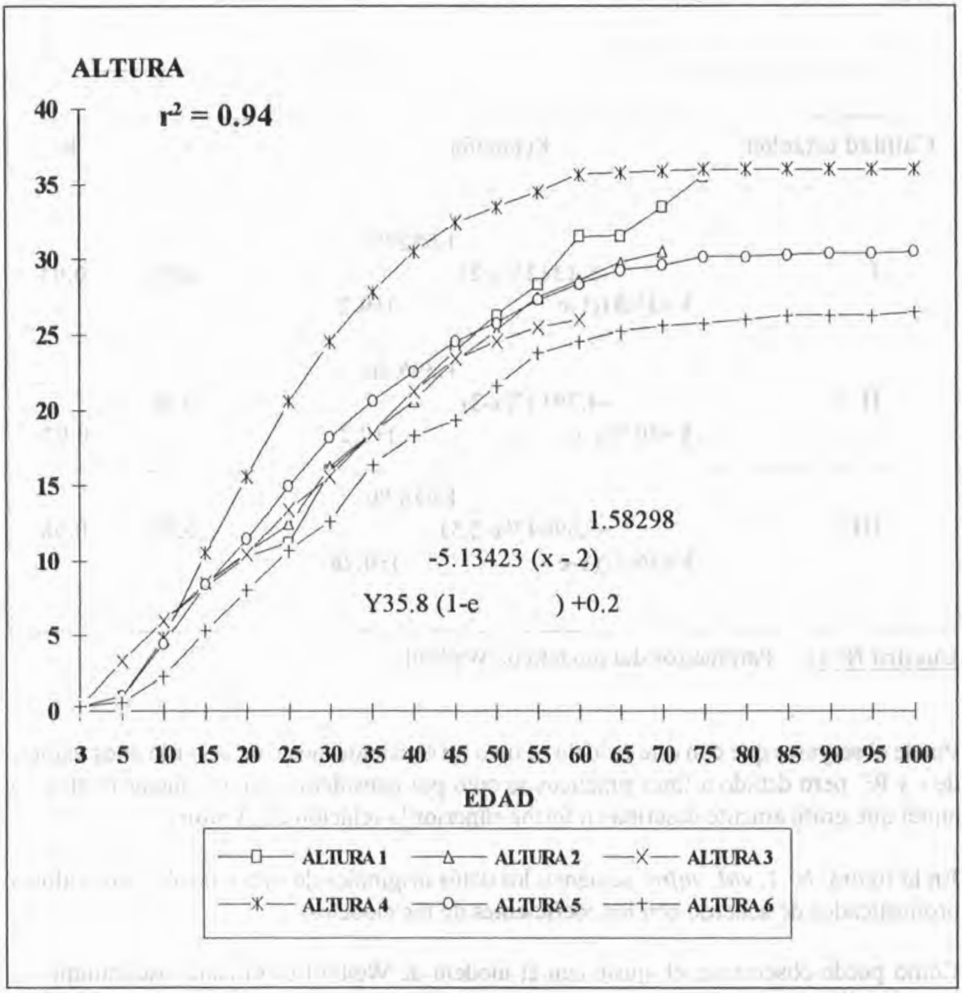

Figura Nº 1. Ajuste edad-altura con el modelo Weibull.

De hecho, el suavizar los valores que presentan grandes oscilaciones por factores medio-ambientales que interactúan con el genotipo del árbol, es la función del modelo, así como estar en condiciones de simular y predecir patrones de comportamiento sin tener que esperar todas las fases fenológicas del árbol.

En relación con el modelo de Schumacher, en el cuadro N° 2 se observan los parámetros de las ecuaciones del modelo y los coeficientes de regresión y determinación que reflejan un excelente ajuste en las calidades de estación I y II; y un ajuste que podría considerarse como bueno en la calidad III, de acuerdo con estos coeficientes.

Así es en realidad en las dos primeras calidades, pero como se aprecia en la figura 2, *vid., infra,* el ajuste del modelo a la calidad III es definitivamente malo; ya que primero sobreestima levemente y después subestima fuertemente.

Es notable que el árbol muestra tuvo fuertes alteraciones en etapas de crecimiento, que le dan definitivamente tendencias muy irregulares, por lo que hasta para considerarlo como muestra se debieron tener en cuenta estas variaciones.

Sin embargo, en lugar de desecharlo, se decidió su utilización como prueba de fuego de cada uno de los modelos y así observar su comportamiento en estas situaciones.

Calidad de estación	**Ecuación**	**r**	**R^2**
I	**$LnY = -11.112225\,X^{0\text{-}66} + 4.357721$**	**0.998**	**0.996**
II	**$LnY = -11.366994\,X^{0\text{-}77} + 3.777460$**	**0.998**	**0.996**
III	**$LnY = -12.751696\,X^{0\text{-}89} + 3.299244$**	**0.97**	**0.94**

Cuadro N° 2. Parámetros del modelo de Schumacher.

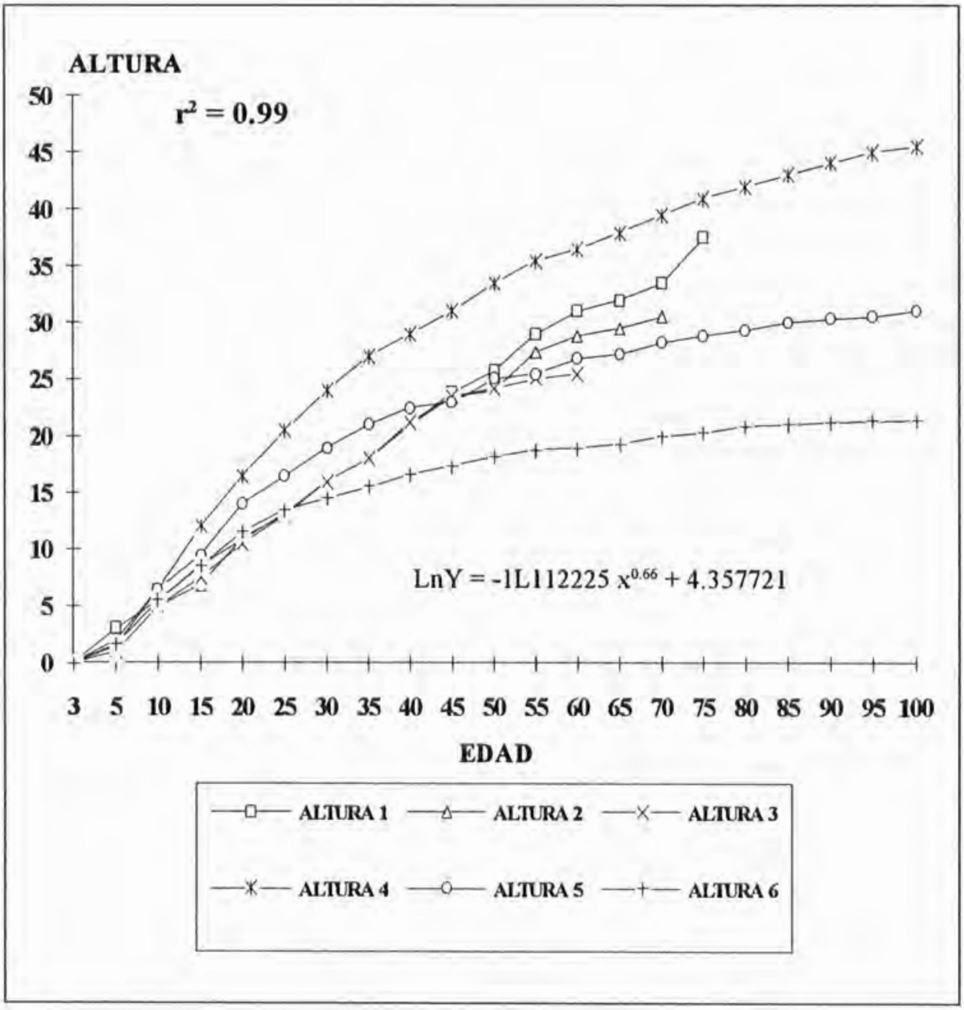

Figura N° 2. Ajuste edad-altura con el modelo de Schumacher.

Respecto al modelo de Gompertz, se observa en el cuadro Nº 3 que, de acuerdo a los coeficientes de correlación y determinación, este modelo de crecimiento actuó a la inversa del modelo de Schumacher.

En el modelo de Schumacher se tienen valores altos de correlación y determinación en forma descendente de la calidad I a la III; mientras que el de Gompertz presenta estos valores en forma ascendente, iniciando con la r y R^2 más altos en la calidad III.

El modelo de Weibull sólo difiere al ofrecer un buen ajuste contra el de Schumacher y un ajuste similar en el de Weibull con Gompertz. Lo anterior podría implicar que, en determinados casos puede ser necesario el uso de otros modelos para realizar un buen ajuste de acuerdo con la calidad de estación.

Calidad de estación	Ecuación	r	R^2
I	$Y = 3^{e^{-e^{1.480551-0.081954X}}}$	0.94	0.88
II	$Y = 31^{e^{-e^{1.029028-0.051286}}}$	0.96	0.92
III	$Y = 26.5^{e^{-e^{1.248621-0.055192X}}}$	0.98	0.96

Cuadro Nº 3. Parámetros del modelo de Gompertz.

Independientemente de las R^2 que son buenas, el modelo de Gompertz visualmente ofrece un buen comportamiento, *vid.*, figura 3, a excepción de la etapa inicial en la que sobreestima fuertemente; sólo una parte muy pequeña.

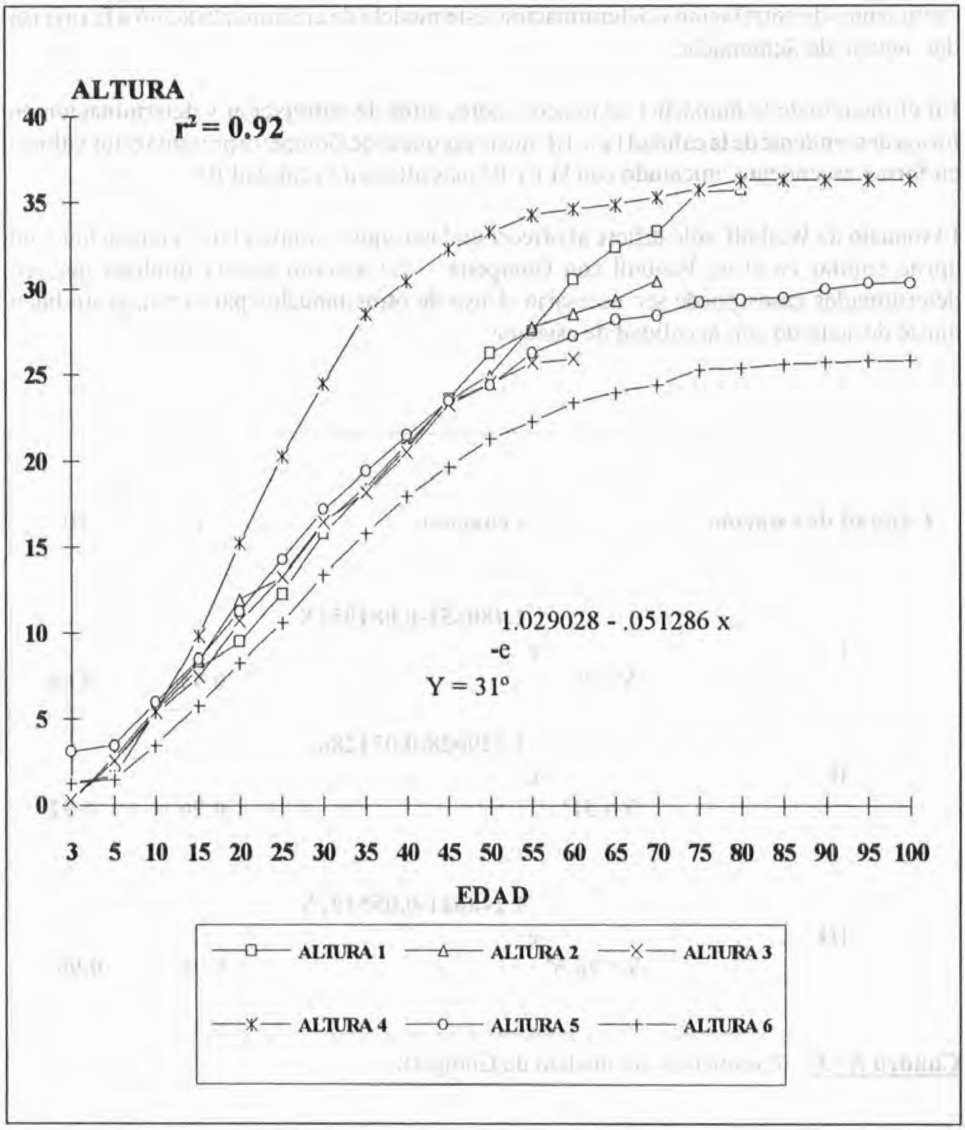

Figura N° 3. Ajuste edad-altura con el modelo de Gompertz.

Existe una sobreestimación inical con respecto a la calidad I, observándose un buen ajuste del árbol de calidad III en la que el modelo de Schumacher tuvo problemas; y aunque la R^2 de Weibull es mayor que la de Gompertz (0.98 a 0.96), gráficamente Gompertz supera aunque sea ligeramente a Weibull, a excepción de la parte inicial; pero este inicio tal vez pueda ser corregido al elegir valores más bajos de inicio del crecimiento.

Por último, el modelo logístico que, como se muestra en el cuadro Nº 4, presenta los coeficientes r y R^2 más bajos, por lo que en principio ya indica el poco ajuste obtenido con este modelo en relación con los demás.

Calidad de estación	Ecuación	r	R^2
I	$Y=\dfrac{36}{1+e^{2.944220-0.113087X}}$	0.89	0.79
II	$Y=\dfrac{31}{1+e^{2.214097-0.067695X}}$	0.86	0.74
III	$Y=\dfrac{26.5}{1-^{\circ\,2.580655-0.074004X}}$	0.89	0.79

Cuadro Nº 4. Parámetros del modelo logístico

Mientras que las demás R^2 superaron el valor de 0.90, a excepción de la calidad I (con el modelo de Gompertz), todas las R^2 del modelo logístico no superan siquiera el 0.80%.

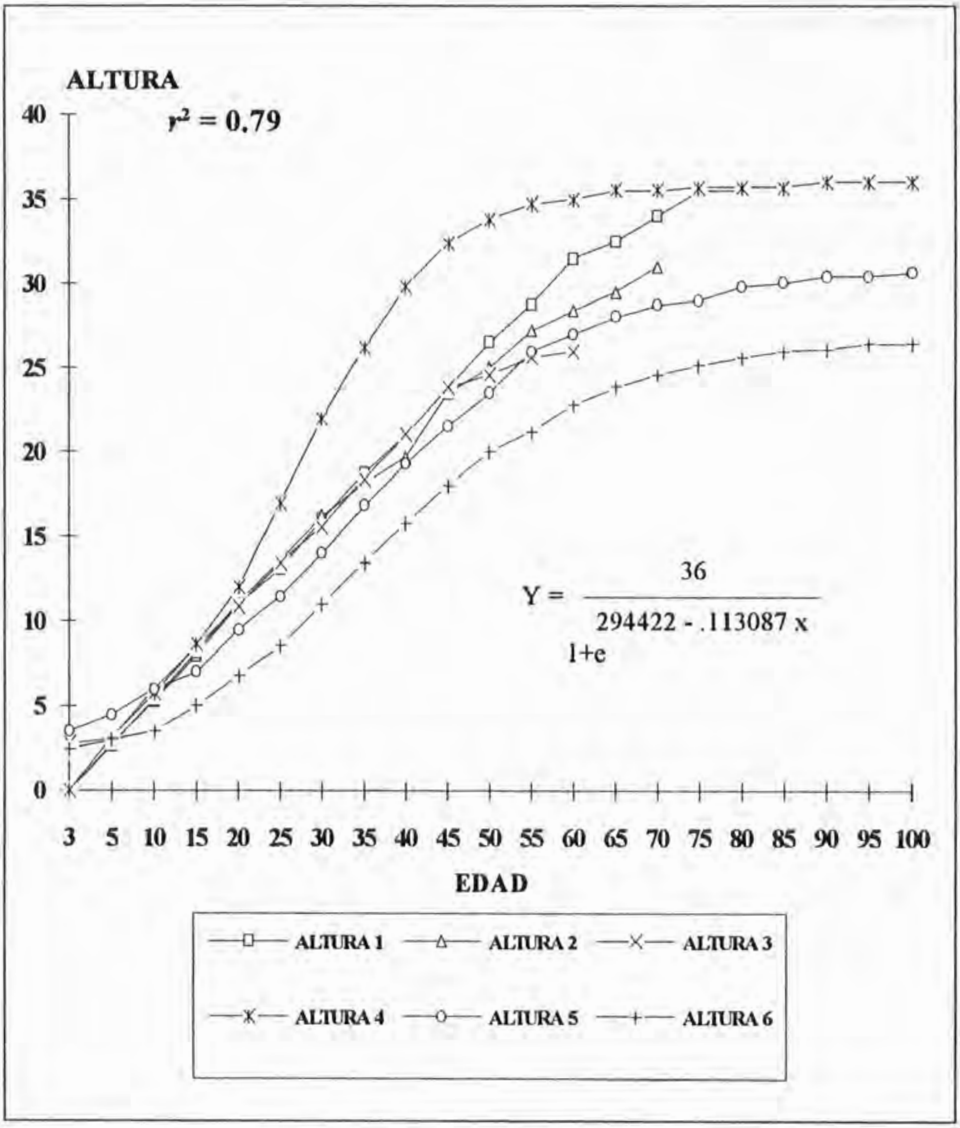

Figura N° 4. Ajuste edad-altura con el modelo logístico.

Eso se refleja en la figura Nº 4, en la que fácilmente se observa que las curvas de ajuste no describen para nada la tendencia de los datos originales, sobreestimando en la etapa inicial y subestimando fuertemente después durante un largo periodo, para hacer en la fase de descanso una descripción muy breve.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Como se pudo observar, los modelos analizados presentaron buenos ajustes y valores altos de r y R^2, a excepción del modelo logístico que, definitivamente no se sugiere utilizar en este tipo de relaciones.

Sin embargo, no debe descartarse su uso para otro tipo de determinaciones, como lo usaron Bolton[20] y colaboradores, para realizar una serie de predicciones en bosques; y como Monserud[21], que lo utilizó para simular la mortalidad en bosques.

En relación con los otros tres modelos: Weibull, Schumacher y Gompertz; unos presentan un mejor ajuste que otros en diferentes etapas. Por ejemplo, Weibull y Schumacher ajustan bien las primeras etapas; no así Gompertz, aunque es mínima su falta de ajuste.

Mientras que Schumacher realiza un excelente ajuste, excepto al final, cuando la tendencia del modelo es prolongarse; es pertinente aclarar que ésto no funciona así en la realidad, pues en la fase de descanso temporal, el árbol disminuye notoriamente su crecimiento en altura, lo que sí se refleja en los otros dos modelos.

El hecho de tener buenos ajustes en la relación edad-altura, implica que también se tendrán en otro tipo de relaciones como edad-diámetro, edad-volumen, edad-área basal, o diámetro-altura.

En consecuencia, se pueden aplicar para realizar tarifas de volúmenes y para determinar calidad de estación, como ya lo ha demostrado Aguilar *op.cit.*

En síntesis, se puede sugerir el uso de los modelos de Weibull, Schumacher y Gompertz para los usos señalados; en el orden que se presentaron y únicamente con pequeñas modificaciones en usos específicos.

[20] Bolton, R. K. *et al.* 1986. "The prediction of data into multiple categories using a form of logistic regresion". pp. 518-525.

[21] Monserud, R. A. 1976. "Simulation of forest tree mortality". pp. 438-444.

Schumacher es el mejor para calidad de estación; Weibull y Gompertz para crecimiento; los tres son buenos para tarifas.

En general, los tres ofrecen resultados excelentes.

BIBLIOGRAFÍA.

Aguilar, R, M. 1982. Estudio del crecimiento de *Pinus douglasiana* y *Pinus lawsonii* en la región centro de Michoacán. Tesis Licenciatura. U M S N H. Facultad de Agrobiología "Presidente Juarez" Uruapan, Michoacán. 88 p.

Aguilar, R, M. 1983. La ecuación de Schumacher y su aplicación en estudios del crecimiento y clave de sitio. Premio Nacional de Administración Pública 1982. CIFO-INIF. México. 69 p.

Aguilar, R, M. 1984. "Armonización de curvas de crecimiento y calidad de estación". Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. Pub. Esp. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales. Nº 44. México. pp 169-181.

Aguilar, R, M. 1988. "Algunas relaciones alométricas y su comportamiento con el modelo de Weibull". Serie Investigación Técnica. Epoca I Nº 7 septiembre - octubre. Dirección Forestal. Edo. de Michoacán UAF Nº 4 Acuitzio-Villa Madero. México. pp. 13-25.

Alder, D. 1980. Forest volumen estimation and yield prediction. Vol. 2 Yield Prediction. Food and Agriculture Organization of the United Nations. Rome. 194p.

Amo, R, S. del *y* Pascual, Z. M. de. 1980. Aplicación de ecuaciones y modelos matemáticos en la evaluación de tasas de crecimiento y determinación de la edad en árboles tropicales. INIREB. México.

Benavides, J. D. 1987 Estimación de la calidad de sitio mediante índices de sitio del *Pinus michoacana cornuta* Martínez y *Pinus oocarpa* Schiede, para el A D F Tapalpa, estado de Jalisco. Tesis Licenciatura. U A C H. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 80 p.

Bolton, R. K; Meldahl, R. S. *and* Eriksson, M. 1986. "The prediction of data into multiple categories using a form of logistic regresion". Procedings of the Fourth Biennial Souther Silvicultural Research Conference U S D A Forest Service U S A. pp. 518-525.

Burk, T. Z. *and* Burkhart, H.E. 1984. Diameter distributions and yields of natural stand of *Loblolly pine.* FWS-184 Div. of for. and wild resourse. 48 p.

Cao, V. Quam. 1986. "Recovering diameter distributions from Schumacher and Coile's model for natural even-eged *Loblolly pine* stand". Proceedings of the Fourth Biennial Southern Silvicultural Research Conference. U S D A. FS. pp. 514-517.

Cluter, J. L. *and* Allison, B. J. 1974. "A growth and yield model *Pinus radiata* in New Zeland". Fries, J. (ED) Growth models for tree and stand simulation. Skogshogskolan, Stockholm, Res. Note 30. pp. 137-160.

Bailley, R. L. *and* Dell, T. R. 1973. "Quantifying diameter distributions with the Weibull function". For. Sci. 19. pp. 197-204.

Day, Z. R. 1983. The modified Weibull function. Program Record. Texas Insruments.

Ek, A. R. *and* Monserud, R. A. 1974. Forest: A computer model for simulating the growth and reproduction of mixed species forest stands. Sch. nat. res. Research report. R. 2635. Univ. Wisconsin. 13 p. más apéndices.

Farrar, M. R. *and* Murphy, A. P. 1986. "In search of an improved sawtimber stand volume function". Proceedding of the Fourth Biennial Southern Silvicultural Research Conference. U S D A. F S. pp. 508-513.

France, Z. *and* Thornley, J. H. M. 1984. "Mathematical models in agriculture". Butterworths, London. pp. 75-94.

Franco, B. M. 1970. Simulación demográfica y productiva de poblaciones uniespecíficas de árboles. Tesis Profesional. Instituto de Biología. U N A M.

Krebs. Z. Ch. 1985. Estudio de la distribución y la abundancia. Harper and Row publishers, Inc. New York.

Lenhart, Z. D. 1986. "Estimating the amount of wood per acre in *Loblolly* and *Slash pine* plantation in east Texas". Proceeding of the Fourth Biennial Southern Silvicultural Reserach Conference. U S A. pp. 485-488.

Maynard Smith, J. 1974. "Models in ecology". Cambridge University Press. Cambridge, pp. 12-15.

Monserud, R. A. 1976. "Simulation of forest tree mortality" For Sci. 22(4). pp. 438-444.

Schumacher, F. X. *and* Coile, T. X. 1960. Growth and yield of natural stands of southern pines. T. S. Coile, Inc. Durham, N.C. 115 p.