

COMPARACIÓN DE NUEVE MODELOS EMPÍRICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE ÍNDICE DE SITIO EN MICHOACÁN.

Madrigal Huendo Salvador*
Ramírez Maldonado Hugo**

RESUMEN

Con la finalidad de tener un mayor conocimiento y poder tomar decisiones adecuadas sobre la bondad de ajuste de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull, utilizados en diseño de sistemas de curvas de Índices de Sitio (IS), se probaron las metodologías: Curva Guía y Diferencia Algebraica, de la segunda, los tipos anamórficos y polimórficos. La información analizada fue procedente de análisis troncales de *Pinus douglasiana* Martínez y *P. lawsonii* Roehl del Campo Experimental Barranca de Cupatitzio, ubicado en Uruapan, Michoacán. Se empleó el paquete de computo SAS (Statistical Analysis System), aplicando el procedimiento no lineal (NLN) con el método DUD ó sin uso de derivadas. Se observó que la diferencia algebraica es la mejor metodología cuando se cuenta con remediciones y de ésta el tipo polimórfico. De los modelos probados el que mejor bondad de ajuste proporcionó fue el polimórfico de Schumacher, además de que es el mas parsimonioso o austero.

Palabras Clave: Índice de Sitio, Curva Guía, Diferencia Algebraica, Schumacher, Chapman-Richards, Weibull, Michoacán.

* Maestro en Ciencias, Investigador del Campo Experimental Barranca de Cupatitzio. CIR-Pacífico Centro, INIFAP, SAGAR.

** PhD, Profesor de Tiempo Completo, División de Ciencias Forestales y del Ambiente. UACH.

ABSTRACT

In order to have a logger knowledge to take decisions about the kindness of adjustment of the Schumacher, Chapman-Richards and Weibull models, utilized at designs of system Site Index (IS), were proved the methodologies: Guide Curve and Algebraic Difference; from the secondary, the anamorphic and polymorphic types. Information analyzed comes from trunk analysis of *Pinus douglasiana* Martinez and *Pinus lawsonii* Roehl. from the Experimental Station Barranca de Cupatitzio, located at Uruapan, Michoacan State, Mexico. Was employed the SAS (Statical Analysis System) computer package, applying not line procedure (NLN) with the DUD or method without deriving use. It was observed that the algebraic difference is the better methodology when remeasurement is relied on, and of this, polymorphic type. The Algebraic Difference model was the better, in order of the most parsimonious or austere characteristics.

Key words: Site Index, Schumacher, Chapman-Richards, Weibull, Guide Curve, Algebraic Difference, Michoacan.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de las masas arboladas, permite al responsable del manejo forestal definir los niveles de producción que es posible esperar del bosque y las actividades silvícolas que permitan mantener la estructura deseada de cada una de las masas. Del conocimiento del bosque destaca aquel que da idea sobre el grado y la forma de ocupación del espacio disponible para el crecimiento de los árboles (estructura y densidad), la capacidad productiva de los sitios (calidad de sitio), las capacidades productivas de las masas (rendimiento) y algunos otros que auxilien en la prescripción de tratamientos silviculturales en general.

Los modelos para estimar la capacidad productiva de los terrenos forestales, son algunas de las herramientas sobresalientes, ya que pueden ser utilizados en el diseño de regímenes silvícolas biológicamente posibles, así como predecir el incremento y rendimiento de árboles y masas forestales, predicciones necesarias para la instrumentación de los esquemas de regulación. En general, tales herramientas son ecuaciones, o sus representaciones gráficas, de las relaciones existentes entre variables del ambiente.

Uno de los factores más importantes que influyen en el crecimiento de las masas arboladas, es la calidad de estación, definida como la capacidad potencial de producción de madera de un sitio para una especie en particular o para un tipo de bosque. En sí, es un índice relacionado a la máxima cantidad de volumen de madera que el suelo puede producir en cierto período (Clutter *et al.*, 1983¹; Davis y Jhonson, 1987²).

La calidad de estación frecuentemente ha sido evaluada a través de procedimientos indirectos como es el Índice de Sitio (IS); este índice en un principio se obtenía de la adaptación de datos de edad, altura de curvas de crecimiento de una tabla de rendimiento normal. Desafortunadamente, es difícil encontrar rodales puros, coetáneos, con una densidad completa y de diferentes edades, por lo que en la actualidad la información se obtiene por medio de análisis troncales.

Existe un gran número de modelos para determinar el IS y mediante diferentes técnicas que se emplean para su ajuste estadístico, otros más se pueden derivar de ellos. A través de un estudio comparativo, es factible determinar cual de ellos es el apropiado bajo ciertas condiciones y necesidades. Con este propósito, en el presente trabajo se hace la comparación de nueve modelos empíricos de crecimiento utilizados en la determinación del Índice de Sitio, bajo las consideraciones de exactitud y precisión obtenida en sus resultados, así como su parsimonia.

Los objetivos específicos del estudio fueron:

- Determinar el modelo de mejor bondad de ajuste según lo especificado anteriormente.
- Analizar el patrón de crecimiento en altura de las especies en diferentes sitios, para identificar anamorfismo o polimorfismo en sus correspondientes curvas de Índice de Sitio.
- Comparar las metodologías de Curva Guía y Diferencia algebraica, así como los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull.

ANTECEDENTES

En la actualidad, los modelos matemáticos son una de las herramientas analíticas más empleadas para la generación de conocimiento sobre el crecimiento y reproducción de

¹ Clutter, J. L.; J. C. Fortson; L. V. Pienaar y R. L. Bailey, 1983. Timber management: A quantitative approach.

² Davis, S. L. y K. N. Johnson, 1987. Forest Management.

masas forestales sujetas a un régimen de cultivo. La diversidad de modelos en cuanto a su estructura, componentes, construcción y propósitos de utilización, se debe a que el crecimiento y la reproducción son procesos complejos y por lo tanto han justificado gran número de proyectos de investigación (Mendoza, 1983³).

La cualidad de abarcar procesos dinámicos que implican un cambio continuo en el tiempo, ha sido uno de los puntos mas relevantes para la adopción generalizada de los modelos matemáticos como herramienta de investigación biológica. Por lo que, Mendoza (*op. cit.*) especificó que para comprender mejor la forma en que los modelos abordan el carácter dinámico, es necesario abstraer del total de los elementos que conforman ese carácter, algunas cualidades que son comunes a casi todos los tipos de modelos. Así por ejemplo, este autor menciona que es posible abstraer el fenómeno del crecimiento de árboles en dos variables básicas, el tamaño y la edad.

Tales abstracciones, tanto en la operación administrativa como en la investigación, son modelos del sistemas bajo análisis. Para modelar el crecimiento de árboles y masas forestales, necesariamente debe existir un motivo, que en este caso es la administración para la producción maderable y los medios para lograr su construcción (Ramírez, 1994⁴). Los medios para la construcción se configuran con base a los conceptos teóricos que sobre el crecimiento se tengan. Actualmente se discierne sobre dos corrientes principales: los modelos empíricos y los modelos de procesos.

Los modelos de Índice de Sitio se clasifican dentro de los denominados empíricos, ya que en ellos, los procesos biológicos no son considerados directamente; en cambio, el crecimiento se toma como la respuesta de un sistema complejo, sobre el que actúa un gran número de variables, pero pocas de ellas, frecuentemente solo una, la edad, se considera para el modelaje (Ramírez, *op. cit.*). Estos modelos son producto de la experiencia, tanto del modelador como aquella obtenida con la experimentación y pueden ser para árboles y masas forestales; en los primeros los más relevantes son para el crecimiento en altura.

El término Calidad de Sitio ó de Estación, se refiere a la capacidad que tiene un terreno forestal para favorecer el crecimiento de los árboles. Por lo tanto, la calidad del sitio estará determinada por la suma de los factores que afectan la productividad de un bosque, como son los climáticos, edáficos, topográficos y biológicos (Spurr y Barnes, 1982⁵; Musálem *et al.*, 1986⁶; Daniel *et al.*, 1982⁷, Pritchett 1986⁸).

³ Mendoza B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. *In*: Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. pp. 35-45.

⁴ Ramírez M., H. 1994. Construcción de modelos de crecimiento y su aplicación en el diseño de regimenes silvícolas. *In*: Memoria del Simposio de Manejo y Silvicultura. pp. 25-31.

⁵ Spurr, S. H. y B. V. Barnes. 1982. Ecología Forestal.

En dasonomía, el término sitio se utiliza en dos sentidos, ya sea como una posición geográfica o como las condiciones del ambiente físico asociado a un lugar. En este último sentido, el sitio puede definirse como un área en donde se combinan características de suelo, topografía, clima y factores bióticos (Clutter *et al.*, *op. cit.*).

Para la evaluación de la Calidad de Sitio, (Clutter *et al.*, *op. cit.*), clasificaron a los métodos en directos e indirectos; en los primeros consideran la estimación en función de datos dasométricos. Mientras que en los segundos la estimación es a partir de la relación que hay entre especies, características de la vegetación y factores topográficos, climáticos y edáficos.

Debido a que el conocimiento de las interacciones existentes entre las propiedades de los suelos y la capacidad de rendimiento de los terrenos forestales es insuficiente para la estimar la Calidad de Sitio, se han utilizado la altura dominante y los volúmenes totales que son características del crecimiento de los árboles que reflejen la respuesta de las plantas al nivel de la productividad del sitio en cuestión (Loetsch *et al.*, 1973⁹).

Davis y Johnson (*op. cit.*), mencionaron que se ha desarrollado un conjunto de métodos indicadores para medir la productividad del sitio ya que ésta, raramente se mide directamente a través del volumen del rodal, además de que dichos métodos procuran seleccionar medidas fáciles de las propiedades de la vegetación o del suelo; de esa forma, de todas las medidas que se han generado, la del crecimiento en altura es la más práctica, consistente y útil como indicador de la Calidad de Sitio. Se le ha utilizado también por considerar que es la variable dasométrica menos afectada por la densidad (Loetsch *et al.*, *op. cit.*)

Entre las ventajas que tiene el Índice de Sitio, se pueden mencionar las siguientes: es confiable porque se expresa en forma numérica se mide fácilmente y está libre de la influencia de la densidad del rodal (Curtis, 1964¹⁰; Spurr y Barnes, *op. cit.*; Hägglund, 1981¹¹). Al hacer una aclaración al último punto, algunos autores dicen que los extremos en densidad afectan al Índice de Sitio (Border *et al.*, 1984)¹². El Índice de

⁶ Musálem S., M. A.; C. Rodríguez; F. Carrillo y G. Vera. 1986. Proyecciones de la investigación silvícola en los suelos forestales de México.

⁷ Daniel, P. W.; U. W. Helms y F. S. Baker. 1982. Principios de Silvicultura.

⁸ Pritchett, L. W. 1986. Suelos forestales (propiedades, conservación y mejoramiento).

⁹ Loetsch, F.; F. Zöhrer y K. E. Haller. 1973. Forest inventory.

¹⁰ Curtis, R. O. 1964. A stem-analysis approach to site index curves. pp 241-256.

¹¹ Hägglund, B. 1981. Evaluation of forest site productivity. pp. 515-527.

¹² Borders, B. E.; R. L. Bailey y K. K. Ware. 1984. Slash pine site index from a polymorphic model by joining (splining) nonpolynomial segments with an algebraic difference method. pp. 411-423.

Sitiofrecuentemente sirve también como un criterio básico en el desarrollo y prueba de métodos alternativos para evaluar la Calidad (Jones, 1969¹³).

La forma más comúnmente empleada para estimar la productividad de los bosques constituidos por rodales coetáneos, es el método de Índice de Sitio, el cual consiste fundamentalmente en la construcción de un sistema de curvas de crecimiento en altura, que representen el comportamiento de esta variable durante la vida de los rodales en localidades diferentes (Stage, 1963¹⁴), de tal forma que al conocer la altura dominante y la edad de una masa coetánea, puede asignársele un Índice de Sitio de acuerdo a la altura que dicha masa alcance a una edad determinada (Alder, 1980¹⁵).

Las curvas de Índice de Sitio pueden derivarse de mediciones donde se toma la edad y la altura de los árboles elegidos en diferentes períodos de tiempo o de mediciones edad-altura en un tiempo y en un lugar, de un gran número de árboles de un rango de edades juveniles hasta maduros. La primera metodología utiliza análisis troncales o mediciones de árboles elegidos en sitios de muestreo permanentes y la segunda, utiliza sitios temporales (Brickell, 1968¹⁶).

Avery y Burkhart (1983¹⁷), Clutter *et al.*, (*op. cit.*), Rivero y Zepeda (1990¹⁸), señalaron que de acuerdo a las técnicas de construcción, las curvas de Índice de Sitio pueden ser anamórficas o polimórficas. Las últimas divididas en articuladas y desarticuladas (no cruzadas y cruzadas en el rango de edad de interés).

Las curvas anamórficas de Índice de Sitio, se caracterizan por presentar la misma forma, ya que son proporcionales, con pendiente constante entre ellas a una misma edad, pero con interceptadas al origen diferentes (Clutter *et al.*, *op. cit.*), lo cual provoca que el punto de inflexión de todas ellas ocurra a una misma edad (Zepeda y Rivero, 1990¹⁹).

Las curvas polimórficas, por su parte, son familias de líneas con pendiente variable, que generalmente no guardan una relación de paralelismo entre sí, no son

¹³ Jones, J. R. 1969. Review and comparison of site evaluation methods.

¹⁴ Stage, A. R. 1963. A mathematical approach polymorphic site index curves for grand fir. pp. 67-180.

¹⁵ Alder, D. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento, con referencia especial a los trópicos.

¹⁶ Brickell, J. E. 1968. A method for constructing site index curves from measurements of tree age and height its application to inland douglas-fir.

¹⁷ Avery, T. E. y H. E. Burkhart. 1983. Forest measurements.

¹⁸ Rivero B., D. P. y E. M. Zepeda. 1990. Principios básicos de regulación forestal.

¹⁹ Zepeda B., E. M. y P. Rivero. 1984. Construcción de curvas anamórficas de índice de sitio: ejemplificación del método de la curva guía. pp. 3-38.

proporcionales al no depender unas de otras, por tal razón, sus puntos de inflexión ocurren en edades diferentes. En ellas se observa que el crecimiento en altura culmina más temprano en los sitios de mejor calidad (Assman, 1970²⁰; Clutter et al., *op. cit.*; Aguirre, 1984²¹; Arteaga, 1985²²; Davis y Jhonson, *op. cit.*; Rivero y Zepeda, *op. cit.*; Acosta, 1991²³).

La construcción de curvas de Índice de Sitio puede realizarse por métodos gráficos o analíticos; ambos procedimientos pueden emplearse tanto para curvas anamórficas como para polimórficas (Curtis, *op. cit.*; Alder, *op. cit.*; Arteaga, *op. cit.*).

El Índice de Sitio es una representación gráfica que describe la relación entre la altura y la edad de un rodal o árbol individual; para modelar dicha relación se han utilizado diferentes modelos y técnicas para ajustarlos. La mayoría de estas técnicas, según Clutter *et al.*, (*op. cit.*), se encuadran en el método de la Curva Guía, el método de la Diferencia Algebraica y el método de la Predicción de Parámetros. Estos modelos pueden construirse con datos de altura-edad provenientes de:

- Parcelas temporales (método de la Curva Guía).
- Árboles muestra o parcelas permanentes.
- Análisis troncal.

Método de la Curva Guía. Este método, es empleado para generar curvas anamórficas; representa una tendencia promedio de las alturas dominantes a partir de la cual se trazan curvas proporcionales por arriba y por abajo de tal curva guía. Es una cuantificación directa de los primeros métodos gráficos usados en la construcción de curvas de Índice de Sitio. Los datos de altura-edad son obtenidos de una gran variedad de rodales de diferentes calidades de estación y edades (Avery *et al.*, *op. cit.*; Clutter *et al.*, *op. cit.*).

Zepeda y Rivero (*op. cit.*), abordaron exhaustivamente este procedimiento y concluyeron que para definir la tendencia de la Curva Guía, las alternativas son en forma gráfica ó analítica. La primera de ellas ha sido ampliamente utilizada en

²⁰ Assman, E. 1970. The principles of forest yield study.

²¹ Aguirre C., O. A. 1984. Estimación de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl., en la región de Iturbide, Nuevo León.

²² Arteaga, M. B. 1985. Índice de sitio para *Pinus patula* Schl. et Cham., en la región Chignahuapan-Zacatlán, Puebla.

²³ Acosta M., M. 1991. Modelo de crecimiento para *Pinus montezumae* Lamb., en el CEF San Juan Tetla, Puebla.

México, según señalan Musálem (1977²⁴), Ramírez y Fierros (1989²⁵) y Rosales *et al.*, (1982²⁶); en cambio, la segunda, consiste en ajustar analíticamente un modelo matemático a los datos de edad-altura dominante, a fin de explicar funcionalmente la relación existente entre la altura dominante y la edad del arbolado, todo esto con el propósito de predecir la altura dominante en función de la edad.

Método de la Diferencia Algebraica. Para el ajuste de curvas de Índice de Sitio por el método de la Diferencia Algebraica, se requieren datos provenientes de sitios permanentes, de la remediación de árboles ó de análisis troncales y pueden ser aplicados a cualquier ecuación altura-edad para generar familias de curvas anamórficas o polimórficas (Acosta, *op. cit.*). El paso inicial en la aplicación de este método es el desarrollo de una fórmula de diferencia algebraica de la ecuación altura-edad ya ajustada. Esta fórmula de diferencia expresa la altura remedida (H_2) como una función de la edad de remediación (E_2), edad inicial (E_1) y altura inicial (H_1) (Clutter *et al.*, *op. cit.*; Ramírez *et al.*, 1988²⁷)

En general, una ecuación de diferencia algebraica tiene la forma:

$$Y_2 = f(y_1, E_2, E_1, \beta's)$$

Donde Y_2 es el valor de una variable continua definida sobre un árbol o un rodal en el período 2 de la medición, Y_1 es la misma variable medida en el período 1; E_2 y E_1 son las edades de los árboles o rodales en los períodos 2 y 1 respectivamente, $\beta's$ los parámetros que no fueron eliminados al formular la diferencia algebraica (Borders *et al.*, 1988²⁸)

Las ventajas de este enfoque de construcción con respecto a otros, son que no varía la edad base y que existe la posibilidad de construir sistemas polimórficos a anamórficos, según se requieran a partir del modelo ensayado (Rivero y Zepeda, *op. cit.*)

²⁴ Musálem L., F. J. 1977. Tablas de producción preliminar en Atenquique. In: Memoria del curso de silvicultura en montes de coníferas. pp. 409-432.

²⁵ Ramírez M., H. y A. M. Fierros. 1989. Estimación de crecimiento y rendimiento de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* a través de su distribución diamétrica. pp. 459-474.

²⁶ Rosales S., P.; M. A. Olayo; J. A. Morales; R. Álvarez D.; I. Martínez y S. Castro. 1982. El método de "Desarrollo Silvícola": Una alternativa en la silvicultura y ordenación de bosques.

²⁷ Ramírez M., H.; R. L. Bailey y B. E. Borders. 1988. Some implications of the algebraic difference approach for developing growth models. pp. 731-738.

²⁸ Borders, B. E.; R. L. Bailey y J. L. Clutter. 1988. Forest growth models: parameter estimation using real growth series. pp. 660-667.

Método de la Predicción de Parámetros. En el ajuste de curvas de Índice de Sitio por el método de Predicción de Parámetros, también se requieren datos de parcelas remedidas (permanentes) o datos de análisis troncales (Clutter *et al.*, *op. cit.*)

MÉTODOS Y RESULTADOS

Como se ha expuesto, el crecimiento en altura de los árboles dominantes y codominantes es considerado como indicador de la calidad de sitio; este indicador se deriva de la relación altura-edad, que puede ser obtenida de parcelas permanentes, parcelas temporales o de análisis troncales. Para el presente estudio se optó por los análisis troncales de 20 árboles por cada especie en estudio, *Pinus douglasiana* Martínez y *P. lawsonii* Roetzl, distribuidos en 4 tipos de suelos. Los árboles seleccionados fueron derribados y seccionados para la obtención de rodajas según la metodología propuesta por Mas (1970²⁹).

Para determinar la edad de cada árbol, se utilizó el número de anillos de crecimiento en la rodaja obtenida a 0.3 m de altura a nivel del suelo, más tres años, al considerar que estas especies crecen aproximadamente 30 cm en los primeros 3 años de vida. Estimada la edad del árbol, se contaron los anillos de la periferia al centro en cada rodaja sin tomar en cuenta, a partir de la corteza, un número de anillos igual al exceso de un múltiplo de cinco, para identificar los anillos correspondientes a 5, 10 15,.....años de edad.

En los análisis troncales se conoce la altura del árbol al ser cortado y las alturas donde fueron obtenidas las diferentes rodajas, pero se desconocen las alturas del árbol en edades anteriores. Esas alturas se obtuvieron tomando la altura de la última rodaja en que aparece esa edad, más la longitud de la punta. La longitud de la punta se puede estimar por varias metodologías: gráficamente por proyecciones, geoméricamente por las relaciones de las dimensiones de cuerpos dendrométricos y analíticamente por regresión; en este trabajo, se obtuvo geoméricamente por medio de las relaciones que guarda el área de dos secciones transversales del paraboloides con la altura de la sección menor y la altura total (Romahn *et al.*, 1987³⁰).

La teoría empírica del crecimiento y rendiemento fue desarrollada para los recursos naturales renovables, como los árboles y otros vegetales, los peces y las aves.

²⁹ Mas P., J. 1970. Instructivo para realizar análisis troncales.

³⁰ Romahn de la V., C. F.; H. Ramírez y J. L. Treviño. 1987. Serie de apoyo académico N° 26.

Inicialmente, partió de las relaciones alométricas, dando origen a los modelos Monomoleculares, Autocatalíticos y el de Gompertz (Roberson, 1923; ; Madawar, 1940; Von Bertalanffy, 1942 y 1957; Amer y Williams, 1957, citados por Richard, 1959³¹; Schumacher, 1939³²; Pienaar y Turnbull, 1973³³).

Al partir de la hipótesis de Von Bertalanffy (*cit. pos.* Richards, 1959³⁰), se tiene que el valor anabólico es proporcional al área superficial del organismo, mientras el valor catabólico es proporcional al volumen de la biomasa; esto en árboles es dado por la relaciones que existen entre las dimensiones del árbol (volumen, altura, diámetro) y el área fotosintética o el área del cambium en el tronco, que es representado por la ecuación:

$$P = cQ^a$$

Donde:

- P = Tamaño (ej. altura en metros)
- Q = Área fotosintética o área del cambium
- a = Relación alométrica (altura: área fotosintética o área del cambium)
- c = Constante de proporcionalidad.

Las representaciones matemáticas de las funciones de crecimiento, comúnmente son fórmulas en términos de tasas de crecimiento, por ejemplo alguna consideración del comportamiento de la tasa de crecimiento en el tiempo. Como otra alternativa, a menudo también se formulan en términos de tasa de crecimiento relativo, por ejemplo, una consideración de la relación entre la tasa de crecimiento y el tamaño, como Schumacher (*op. cit.*) presentó su modelo para *Pinus taeda*.

La forma generalizada del modelo de Chapman-Richards también fue derivada del modelo de Von Bertalanffy, en el cual se consideran las causas esenciales del fenómeno de crecimiento, con la finalidad de que los parámetros del modelo tengan al menos una burda interpretación fisiológica o biológica. Es un modelo determinístico ya que su respuesta está dada por la causa formulada; es un modelo realista, por integrar los supuestos biológicos en función del tiempo.

³¹ Richards, L. H. 1959. A flexible growth function for empirical use. pp. 290-300.

³² Schumacher, F. X. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. pp. 819-820.

³³ Pienaar, L. y K. Turnbull. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model basal area growth and yield in even age stand. pp. 2-22.

La función de distribución de probabilidad de Weibull, ha sido recientemente investigada para modelar el crecimiento en altura (Yang *et al.*, 1978³⁴). Esta función fue desarrollada originalmente por Weibull en 1951, para un estudio de probabilidad de material desajustado; desde entonces se le han encontrado aplicaciones en diseño de crecimiento y rendimiento.

Esta distribución de probabilidad, puede ser fácilmente modificada para formular una función de crecimiento, que genere una amplia variedad de curvas de crecimiento sigmoideas. La analogía óptima entre el valor de una curva de crecimiento y una curva de densidad de probabilidad, fue reconocida por Prodan en 1968, concluyendo que es posible adaptar una función de probabilidad a estudios de rendimiento y crecimiento.

Una función de distribución probabilística tiene valores entre cero y uno. Por ello, para que esta función pueda describir los procesos del crecimiento biológico verdadero de un organismo, es necesario multiplicarla por un factor, que comúnmente es el valor máximo asintótico, determinado por la naturaleza genética y los factores ambientales impuestos sobre dicho organismo.

Al analizar las tres ecuaciones en estudio, Schumacher, Chapman-Richards y FPA-Weibull, se observa que son análogas, ya que son ecuaciones diferenciales de la misma forma. Por eso pueden ser empleadas para representar apropiadamente el crecimiento de árboles y masas forestales.

Con base en lo citado, en el presente estudio se probó la bondad de ajuste de los modelos de Schumacher, Chapman-Richards y el de la Función de Probabilidad Acumulativa de Weibull, desarrollados por los métodos de la Curva Guía y de la Diferencia Algebraica, para obtener curvas de Índice de Sitio anamórficas y polimórficas.

Curva Guía:

Modelo Schumacher

$$H = \beta_1 e^{-\beta_2 E^{-1}} \dots \dots \dots (1)$$

³⁴ Yang, R.C.; A. Kozar y J. H. Smith. 1978. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves. pp. 424-431.

Modelo Chapman-Richards

$$H = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 E} \right]^{\beta_3} \dots \dots \dots (2)$$

Modelo de Weibull

$$H = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}} \right] \dots \dots \dots (3)$$

Donde:

H = altura dominante (m)

e = edad (años)

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ = parámetros

Diferencia Algebraica

Este método emplea pares de observaciones consecutivas de la variable a predecir; así que la altura de la segunda medición (H_2) es predicha en función de la medición inicial (H_1), la edad inicial (E_1) y la edad de la segunda medición (E_2). Este método reconoce la asociación entre dos mediciones del mismo individuo a diferentes edades (Borders *et al.*, 1984³⁵; Ramírez *et al.*, *op. cit.*).

Una ventaja importante que tiene este método, es que genera curvas que pasan por el punto en que la altura es igual al Índice de Sitio a la edad base seleccionada (Clutter *et al.*, *op. cit.*).

Como se sabe, los parámetros de los modelos son los que determinan el tipo de familias de curvas, anamórficas o polimórficas. La selección de estos parámetros, indudablemente, depende de las condiciones locales, las especies y la manera en que en una u otra familia de curvas pueda modelar el comportamiento de la variable a predecir en tales situaciones específicas. Por tal razón, los tres modelos propuestos se

³⁵ Borders, B. E; R. L. Bailey y K. K. Ware. 1984. Slash pine site index from a polymorphic model by joining (splining) nonpolynomial segments with an algebraic difference method. pp. 411-423.

manipularon algebraicamente despejando el parámetro del valor asintótico, originando curvas anamórficas y el parámetro que da la forma dando curvas polimórficas, resultando los modelos:

Curvas Anamórficas:

Modelo Schumacher

$$H_2 = H_1 e^{\beta_2 \left[\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right]} \dots \dots \dots (4)$$

Modelo Chapman-Richards

$$H_2 = H_1 \left[\frac{1 - e^{-\beta_2 E_2}}{1 - e^{-\beta_2 E_1}} \right]^{\beta_3} \dots \dots \dots (5)$$

Modelo Weibull

$$H_2 = H_1 \left[\frac{1 - e^{-\beta_2 E_2^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 E_1^{\beta_3}}} \right] \dots \dots \dots (6)$$

Curvas Polimórficas:

Como se mencionó, las curvas plimórficas pueden ser articuladas y desarticuladas; en las primeras, aun cuando la proporcionalidad no se mantiene, guardan cierta relación entre sí, porque no se cruzan o interceptan en el rango de edad de interés; en cambio

las desarticuladas se presentan como curvas independientes con patrones de forma muy diferentes y al menos alguna de las curvas puede interceptar a otra dentro del rango de edad de interés (Clutter et al., *op. cit.*).

Modelo Schumacher

$$H_2 = \beta_1 \left[\frac{H_1}{\beta_1} \right]^{\frac{E_1}{E_2}} \dots\dots\dots(7)$$

Modelo Chapman-Richards

$$H_2 = \beta_1 \left[\frac{H_1}{\beta_1} \right]^{\frac{\ln[1-e^{(-\beta_2 E_2)}]}{\ln[1-e^{(-\beta_2 E_1)}]}} \dots\dots\dots(8)$$

Modelo de Weibull

$$H_1 = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{H_2}{\beta_1} \right)}{-\beta_2} \right]^{\frac{\ln E_1}{\ln E_2}}} \right] \dots\dots\dots(9)$$

Donde:

- H_1, H_2 = altura dominante a la edad 1 y 2 (m)
- E_1, E_2 = edad de la observación 1 y 2 (años)
- B_1, B_2, B_3 = parámetros

La dispersión de las mediciones de altura contra las de edad, muestra una tendencia definida para las dos especies, sugiere el ajuste de los modelos originales y los obtenidos por la diferencia algebraica.

Para realizar el ajuste sugerido, se empleó el paquete de computo SAS (Statistical Analysis System), aplicando el procedimiento no lineal (NLIN) con el método DUD o sin uso de derivadas; los resultados se muestran en el Cuadro N° 1. Los datos en el cuadro citado se obtuvieron a través del procedimiento NLIN, excepto las determinaciones de la pseudo R^2 y los coeficientes de variación de los estimadores, se anotan los intervalos asintóticos de confianza, dentro de los que se localizan los valores de los coeficientes de regresión o parámetros con un 95% de probabilidad. Estos intervalos fueron utilizados para probar la bondad de ajuste de las ecuaciones, ya que al ser más pequeños, el ajuste se considera mejor.

Ya que los procedimientos de estimación e inferencia en las técnicas de regresión no lineal, no son exactas sino aproximadas y como los estimadores obtenidos en este trabajo son muy similares, en cada metodología de ajuste (Curva Guía, anamórficos y polimórficos), es necesario considerar además la parsimonia o austeridad de los modelos.

Los resultados del análisis de regresión no lineal de los nueve modelos probados para las dos especies de pino, se presentan en el Cuadro N° 1, donde se observa que para la Curva Guía el mejor modelo es el de Schumacher por presentar coeficientes de variación bajos de los estimadores y uniformes en las dos especies, una F calculada mayor y ser el modelo más parsimonioso.

En el caso de la Diferencia Algebraica, tanto para los modelos anamórficos como para los polimórficos, se observa que la suma de cuadrados de los residuales disminuye un 90% aproximadamente. Esto es debido principalmente a la doble utilización de los parámetros, ya que en esta metodología el modelo se obtiene de dos ecuaciones simultáneas, además de que la altura que se predice es una función de otra altura, de la edad 1 y 2, en cambio en la metodología de la Curva Guía la altura se predice en función de la edad.

Como en los modelos anamórficos se considera implícito el asíntota (β_1), entonces se tiene que el parámetro de escala (β_2) y el de forma (β_3) son comunes para todos los sitios. Se observa en el Cuadro N° 1, que la menor variación de los parámetros y el mayor valor de F calculada lo presenta el modelo Schumacher, por lo que se considera el de mejor bondad de ajuste para las dos especies de pino.

MODELO	ESPECIE	G.L.	S. C. RESIDUAL	C.V. DE ESTIMADORES			INTERVALO ASINTÓTICO		PSEUDO R ²	F CALCULADA
				β_1	β_2	β_3	INFERIOR	SUPERIOR		
Schumacher (Curva Guía (1))	1	198	4596.7942	4.16	6.47		42.2529	49.8174	0.746	2031.27
	2	190	5469.4998	4.98	8.18		32.9449	40.1278	0.625	1167.35
Chapman-Richards (Curva Guía (2))	1	197	4640.7244	9.29	25.58	21.40	29.1003	42.1578	0.744	1333.96
	2	189	5317.8174	5.02	19.77	27.97	23.2806	28.4032	0.635	798.02
Weibull (Curva Guía (3))	1	197	4668.2090	10.47	41.71	11.78	27.5801	41.9354	0.742	1325.72
	2	189	5277.1626	4.29	66.40	11.85	22.8450	27.0688	0.638	804.65
Schumacher (anamórfico (4))	1	180	410.1117			3.21			0.968	43062.58
	2	174	399.4048			4.13			0.964	31343.75
Chapman-Richards (anamórfico (5))	1	179	415.7139		7.68	7.49			0.967	21122.11
	2	173	377.5500		14.97	9.14			0.966	16448.34
Weibull (anamórfico (6))	1	179	445.5572		19.22	3.83			0.965	19701.56
	2	173	385.1340		20.18	5.66			0.965	16162.23
Schumacher (polimórfico (7))	1	180	347.1309	3.34			43.2979	49.4118	0.972	50908.35
	2	174	271.4389	3.63			40.0837	46.2784	0.975	46201.55
Chapman-Richards (polimórfico (8))	1	179	434.7349	4.25	10.47		33.8387	40.0411	0.966	20193.76
	2	173	309.7875	6.99	14.44		33.2456	43.8874	0.972	20113.94
Weibull (polimórfico (9))	1	179	519.3349	3.46	21.26		32.3820	37.1320	0.960	16889.77
	2	173	467.9705	9.82	21.69		27.6051	40.8729	0.957	13286.11

Especie 1 = *Pinus douglasiana*. Especie 2 = *Pinus lawsonii*. G.L. = grados de libertad. S.C. = suma de cuadrados.

Cuadro N° 1. Resumen de los análisis de regresión no lineal a datos de altura-edad de *Pinus douglasiana* (1) y *P. lawsonii* (2) para los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull.

Para los modelos polimórficos se tiene que la suma de cuadrados de los residuales sigue disminuyendo (Cuadro N° 1), por lo tanto la F calculada continua aumentando su valor y la menor variación de los parámetros la vuelve a presentar el modelo de Schumacher, por lo que se le considera el de mejor ajuste, además de que es parsimonioso.

En el presente trabajo, el análisis estadístico de las nueve ecuaciones de Índice de Sitio, mostró que las ecuaciones proporcionan rangos más reducidos en los intervalos asintóticos de confianza, coincidiendo con lo especificado por Rawat *et al.*, (1973)³⁶ y Aguirre (1987)³⁷. Estos autores señalan que el desarrollo altura-edad de los árboles dominantes es polimórfico, ya que las pruebas estadísticas indican que la dirección y sesgo producidos por las ecuaciones anamórficas son más grandes.

Con la finalidad de comparar el anamorfismo o el polimorfismo del crecimiento en altura de las especies de pino en estudio, se construyeron los sistemas de curva de Índice de Sitio, con sus respectivas curvas de incremento corriente (IC) e incremento medio (IM) para el modelo seleccionado, en los tipos anamórfico y polimórfico.

Las ecuaciones de tipo anamórfico obtenidas por medio del análisis de regresión no lineal para *Pinus douglasiana* y *P. lawsonii*, con las que se construyeron las curvas de IS, IC, e IM (10), (11) y (12) respectivamente; en las que se sustituyó E_1 por la edad base (EB) 50 años y H_1 por el valor del IS elegido (22, 25, 28, 31 y 34 para *P. douglasiana* y 18, 21, 24, 27 y 30 para *P. Lawsonii*) son:

$$H_2 = ise^{-22.2154 \left[\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{HB} \right]} \dots \dots \dots (10)$$

$$IC = \frac{\partial H_2}{\partial E_2} = IS \left[e^{-22.21(E_2^{-1} - EB^{-1})} \right] \left[-22.21(-E_2^{-2}) \right] \dots \dots \dots (11)$$

³⁶ Rawat, A. S., *et al.* 1973. Detaile nonlinear asymptotic regression studies on tree and stand growth with particular reference to forest yield in Barbaria and India. pp. 182-221.

³⁷ Aguirre B., C. 1987. Stand average and diameter distribution growth and yield models for natural even-age stands of *Pinus cooperii*.

$$IM = \frac{H_2}{E_2} = \frac{ISe^{-22.21\left[\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{EB}\right]}}{E_2} \dots\dots(12)$$

Donde:

H_1 = altura dominante de la primera medición

H_2 = altura dominante de la segunda medición

IS = Índice de Sitio

EB = edad base (50 años)

E_1 = edad de la primera medición

E_2 = edad de la segunda medición

∂ = derivada parcial

Las ecuaciones de tipo polimórfico, resultado del análisis de regresión no lineal para las mismas bases de datos, se describen a continuación, sobre las cuales se construyeron los sistemas de curvas de IS, IC é IM (13), (14), y (15) respectivamente, siguiendo la metodología utilizada en los modelos anamórficos:

$$H_2 = 46.18 \left[\frac{IS}{46.18} \right]^{\frac{EB}{E}} \dots\dots(13)$$

$$IC = \frac{\partial H_2}{\partial E_2} = -\frac{46.18EB}{E_2^2} \ln \left[\frac{IS}{46.18} \right] \left[\frac{IS}{46.18} \right]^{\frac{EB}{E_2}} \dots\dots(14)$$

$$IM = \frac{H_2}{E_2} = \frac{46.18 \left[\frac{IS}{46.18} \right]^{\frac{EB}{E_2}}}{E_2} \dots\dots\dots (15)$$

Para corroborar de manera analítica, si el crecimiento en altura de las especies de pino en estudio es de tipo anamórfico o polimórfico, se obtuvo la segunda derivada parcial con respecto a E_2 de los modelos de crecimiento seleccionados y se igualaron a cero, con la finalidad de obtener la edad de culminación del IC (tangente igual a cero) para cada IS. Observándose que la culminación IC para las funciones anamórficas es la misma edad para todos los IS 10.35 y 11.12 años para *P. douglasiana* y *P. lawsonii* respectivamente. En cambio el máximo IC para los modelos polimórficos es diferente para cada IS, resultando 7.75, 10.06, 12.60, 15.44 y 18.63 años para en los IS 22, 25, 28, 31 y 34 m y de 9, 10, 11.74, 14.68, 18.02 y 18.86 años para *P. lawsonii* en los IS 18, 21, 24, 27 y 30 m respectivamente.

Con lo anterior, se confirma el marcado polimorfismo del crecimiento en altura de las dos especies de pino y que los máximos crecimientos en los sitios de buena calidad se dan hasta los 10 años aproximadamente y después de los 12 años en los terrenos de mediana y baja calidad, esto para *P. douglasiana*. En cambio para *P. lawsonii* el mayor crecimiento se presenta antes de los 12 años en los terrenos de buena calidad y después de los 14 años para los de mediana y baja calidad, coincidiendo con lo expuesto por Asmman (*op. cit.*), Aguirre (*op. cit.*) y Zepeda *et al.*, (*op. cit.*), con respecto a que el punto de inflexión ocurre a diferentes edades.

El marcado polimorfismo en las curvas IS, indica que el crecimiento en altura, se comporta de manera diferentes en los sitios de buena, mediana y baja calidad. También puede interpretarse que en los lugares de buena calidad, el turno es más corto que en los lugares de mediana y baja calidad, por lo que el IS debe ser considerado en el manejo forestal principalmente en la regulación.

CONCLUSIONES

- El modelo de crecimiento de mejor bondad de ajuste por sus estadísticos presentados y su parsimonia fue el polimórfico de Schumacher para las dos especies.
- El crecimiento en altura de las especies en estudio es polimórfico.
- El plan de manejo debe ser diseñado en función de los Índices de Sitio presentes en el área a manejar ya que cada calidad presenta diferente turno.
- Los resultados de los modelos por la Curva Guía y los anamórficos se consideran aceptables pero no tan confiables como los obtenidos con los polimórficos.
- Cuando se cuenta con información de análisis troncales o de parcelas permanentes(remediciones), es mejor utilizar la metodología de la Diferencia Algebraica que la de la Curva Guía.

BIBLIOGRAFÍA

- Acosta M., M. 1991. Modelo de crecimiento para *Pinus montezumae* Lamb., en el CEF San Juan Tetla, Puebla. Tesis de Maestro en Ciencias Forestales. DiCiFo, UACH., México. 88 p.
- Aguirre B., C. 1987. Stand average and diameter distribution grown and yield models for natural even-age stands of *Pinus cooperii*. In partial fulfillment of requirements for the degree of doctor philosophy. Colorado State University. Fort Collins, Colorado. 120 p.
- Aguirre C., O. A. 1984. Estimación de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl., en la región de Iturbide, Nuevo León. Tesis profesional. DiCiFo, UACH., México 71 p.
- Alder, D. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento, con referencia especial a los trópicos. Vol. TT2. Estudios FAO Montes 22/2. Roma. 198 p.

- Arteaga, M. B. 1985. Índice de sitio para *Pinus patula* Schl. et Cham., en la región Chignahuapan-Zacatlán, Puebla. Tesis de Maestría. Colegio de Postgraduados. Montecillos, Méx. 181 p.
- Assman, E. 1970. The principles of forest yield study. Trans. by S. H. Gardiner. Pergamon. Oxford. 506 p.
- Avery, T. E. y H. E. Burkhart. 1983. Forest measurements. 3a ed. McGraw-Hill, New York. 331 p.
- Borders, B. E.; R. L. Bailey y K. K. Ware. 1984. Slash pine site index from a polymorphic model by joining (splining) nonpolynomial segments with an algebraic difference method. *Forest Science* 30: 411-423.
- Borders, B. E.; R. L. Bailey y J. L. Clutter. 1988. Forest growth models: parameter estimation using real growth series. *In: Proceedings of IUFRO Forest Growth Modelling and Prediction Conference, Minneapolis, MN., August 24-28, 1987.* USDA, Forest Service, Gen. Tech. Rep. NC-120 Vol. 2, pp. 660-667.
- Brickell, J. E. 1968. A method for constructing site index curves from measurements of tree age and height its application to inland douglas-fir. USDA, Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station. Research Paper Int-47. 23 p.
- Clutter, J. L.; J. C. Fortson; L. V. Pienaar y R. L. Bailey. 1983. Timber management: A quantitative approach. Wiley. New York. 333p.
- Curtis, R. O. 1964. A stem-analysis approach to site index curves. *Forest Science*, 10 (2): 241-256.
- Daniel, P. W.; U. W. Helms y F. S. Baker. 1982. Principios de silvicultura. McGraw-Hill. México. 492 p.
- Davis, S. L. y K. N. Johnson. 1987. Forest management. 3ª ed. McGraw-Hill. USA. 730 p.
- Hägglund, B. 1981. Evaluation of forest site productivity. *Forestry* bs. 42 (11): 515-527.
- Jones, J. R. 1969. Review and comparison of site evaluation methods. USDA, Forest Service. Rocky Mountain Forest and Range Exp. Station Research Paper RM-51. 27 p.

- Loetsch, F., F. Zöhrer y K. E. Haller. 1973. Forest inventory. Trans. by K. F. Panzer. Munchen, BLV. Vol. 469 p.
- Mas P., J. 1970. Instructivo para realizar análisis troncales. Bol. Div. N° 23, INIF-SFF. México. 23 p.
- Mendoza B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. *In*: Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. Pub. Esp. N° 44. INIF-SARH. México. pp. 35-45.
- Musálem L., F. J. 1977. Tablas de producción preliminar en Atenquique. *In*: Memoria del curso de silvicultura en montes de coníferas. SFF. México. pp. 409-432.
- Musálem S., M. A., C. Rodríguez, F. Carrillo y G. Vera. 1986. Proyecciones de la investigación silvícola en los suelos forestales de México. INIFAP. Inédito. 25 p.
- Pienaar, L. V. y K. Turnbull. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalamffy's growth model basal area growth and yield in even age stand. *Forest Sci.* 19 : 2-22.
- Pritchett L. W. 1986. Suelos forestales (propiedades, conservación y mejoramiento). Ed. Limusa. México. 634 p.
- Ramírez M., H. 1994. Construcción de modelos de crecimiento y su aplicación en el diseño de regímenes silvícolas. *In*: Memoria del Simposio de Manejo y Silvicultura. Colegio de Postgraduados. México. pp. 25-31.
- Ramírez M., H., R. L. Bailey y B. E. Borders. 1988. Som implications of the algebraic difference approach for developing growth models. *In*: Proceedings of IUFRO Forest Growth Modelling and Prediction Conference, Minneapolis, MN., August 24-28, 1987. USDA. Forest Service, Gen. Tech. Rep. NC-120, Vol. 2. pp.731-738.
- Ramírez M., H. y A. M. Fierros. 1989. Estimación de crecimiento y rendimiento de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* a través de su distribución diamétrica. *In*: Salazar, R. (ed.). 1989. Cuarta reunión del Grupo de Trabajo de IUFRO. Silvicultura en los Noetrópicos. Memoria. Antigua, Guatemala. CATIE. Costa Rica. pp. 459-474.

- Rawat, A. S., *et al.* 1973. Detailed nonlinear asymptotic regression studies on tree and stand growth with particular reference to forest yield in Barbaria and India. *In: Growth and Yield Models for Tree and Stand Simulation*. IUFRO. S. 4.01-4 Ed. by Jaran Fries. Stockholm, Sweden. pp. 182-221.
- Richards, L. H. 1959. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10: 290-300.
- Rivero B., D. P. y E. M. Zepeda. 1990. Principios básicos de regulación forestal. UACH. México. 261 p.
- Romahn de la V., C. F.; H. Ramírez y J. L. Treviño. 1987. Serie de apoyo académico N° 26. DiCiFo-UACH. México. 85 p.
- Rosales S., P.; M. A. Olayo; J. A. Morales; R. Alvarez D.; I. Martínez y S. Castro. 1982. El método de "desarrollo silvícola": Una alternativa en la silvicultura y ordenación de bosques. Tesis Ing. Agr. Esp. en Bosques. UACH. México. 406 p.
- Schumacher, F. X. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. *Journal of Forestry* 37: 819-820.
- Spurr, S. H. y B. V. Barnes. 1982. Ecología Forestal. A.G.T. Editor. México. 690 p.
- Stage, A. R. 1963 A mathematical approach polymorphic site index curves for grand fir. *Forest Science* 9(2): 67-180.
- Yang, R. C.; A. Kozar y J. H. Smith. 1978. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves. *Canadian Journal For.* 8: 424-431.
- Zepeda B., E. M. y P. Rivero. 1984. Construcción de curvas anamórficas de índice de sitio: ejemplificación del método de la curva guía. *Ciencia Forestal* 9 (51): 3-38.
- Zepeda B., E. M.; S. Veruette; O. Estrada; y S. Esparza. 1990. Curvas polimórficas de índice de sitio de edad base invariante, para tres especies de pino del Noroeste de Chihuahua. *In: Bol. Téc. N° 25, Serie Técnica*. DiCiFo, UACH. México. pp. 1-40.